



Caractérisation et détection de cibles en guide d'ondes non stationnaire par Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel

Franck-David Philippe

► To cite this version:

Franck-David Philippe. Caractérisation et détection de cibles en guide d'ondes non stationnaire par Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel. Physique [physics]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2008. Français. NNT : . pastel-00005606

HAL Id: pastel-00005606

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00005606>

Submitted on 9 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de l'Université de Paris.Diderot (Paris7)

UFR de Physique

Ecole Doctorale:

Physique Macroscopique

Spécialité:

Acoustique Physique

Présentée par:

Franck-David PHILIPPE

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Paris 7

Caractérisation et détection de cibles en guide d'onde non stationnaire par Décomposition de l'Opérateur Retournement Temporel

sous la direction de Mathias FINK

Soutenance le 1^{er} Décembre 2008

Devant le jury composé de :

Mathias Fink

Josselin Garnier

Vincent Pagneux

Claire Prada-Julia

Julien de Rosny

Philippe Roux

Marc Saillard

Rapporteur

Rapporteur

Remerciements

Je remercie tout d'abord mes parents et ma sœur Cathy qui m'ont soutenu pendant mes longues études et à travers toutes ces années. Ca n'a pas du être facile tous les jours mais ils ont tenu le coup.

Je remercie Mathias pour m'avoir fait donné l'envie de faire de l'acoustique, ses cours à PC ont convaincu plus d'un étudiant d'entrer dans le monde merveilleux de l'acoustique.

Je remercie Claire qui m'a permis de faire cette thèse et pour m'avoir fait découvrir le monde complexe et subtil des invariants de l'ORT.

Je remercie Julien pour son encadrement et ses critiques un peu brutes mais finalement toujours constructives.

Je remercie bien sûr Dominique avec qui, après un léger ajustement du sens de l'ouïe pour comprendre l'accent breton, c'est toujours un plaisir de faire des manip. Sa connaissance des arcanes des instruments électroniques du laboratoire m'a été très utile pendant cette thèse. Sa gentillesse et sa bonne humeur constante font que son départ du LOA pour les lointaines contrées bretonnes a privé le laboratoire d'une partie de son « cœur » (mais bon, je suppose qu'il est difficile de résister à l'appel du grand air et surtout des crêpes au beurre salé).

Je remercie aussi par ordre d'apparition : Nicolas dit « Rako », Juliette, Julien, Sylvain et Carole qui ont toujours été là à mes cotés même dans les moments les plus durs de ma vie (et il y en a eu beaucoup) sans leur présence, je serais sûrement dans un asile en train de faire une dépression.

Merci aux amis qui sont apparus plus tard dans ma vie mais qui comptent aussi beaucoup pour moi : Fabienne, Léa, Stéphanie, Marie, Fernand, Mathieu et Ben.

Merci à tous les membres du bureau des « thésards rigolos » : Papa Jo, Tomtom, Beufa, Tatouille, Pierre pour la bonne ambiance qui régnait dans le bureau pendant ma thèse et surtout merci à Benbob d'avoir arrêté de faire du bruit 2 mn pour que je puisse finir de rédiger ce manuscrit. Une mention spéciale pour Mathieu Renier pour des discussions autour de la table de billard de PC et son humour noir décapant. Merci pour ses conseils de lecteur aguerri sur des livres qu'il faut absolument avoir lu et de spectateur non moins aguerri sur les films qu'il faut absolument avoir vu. Mon univers culturel est plus grand grâce à lui.

Merci au personnel non chercheur du LOA : Patricia plus communément appelée « la Reine du gel PVA », Delphine Charbonneau, Rabia Bachiri et Pierre Landais pour faire tourner le laboratoire dans les coulisses.

Un grand merci général à tous les membres du LOA : les deux Arnauds, Jean-Luc, Gabriel, Didier, Daniel et tout ceux que j'ai oublié, pour avoir réussi à créer un laboratoire de recherche où il fait bon travailler et où il n'est pas rare de croiser quelqu'un en train de siffler en manipant.

Table des matières

Introduction	11
Chapitre I Les techniques de Retournement Temporel en acoustique.....	15
I.1. Le Retournement Temporel	16
I.1.1. Principe du Retournement Temporel.....	16
I.1.2. Le Retournement Temporel en guide d'onde sous-marin.....	20
I.1.3. Le Retournement Temporel en guide non stationnaire.....	23
I.2. La méthode DORT.....	26
I.2.1. L'Opérateur Retournement Temporel et ses invariants.....	26
I.2.2. La méthode DORT en guide d'onde	27
Bibliographie	31
Chapitre II Guide d'onde et Décomposition de l'Opérateur Retournement Temporel.....	33
II.1. Fonctions de Green en guide d'onde.....	35
II.1.1. Rappel sur la théorie des ondes.....	35
II.1.2. Méthode des images	37
II.1.3. Méthode des modes normaux.....	42
II.2. Le principe du Retournement Temporel en mode échographique	52
II.2.1. La matrice de transfert K.....	52
II.2.2. L'opérateur de Retournement Temporel	54
II.2.3. Repropagation des vecteurs propres monochromatiques.....	59
II.3. Reconstruction des vecteurs propres temporels en guide d'onde pour la télécommunication	66

II.3.1. Position du problème en guide d'onde.....	66
II.3.2. Utilisation en mer	72
II.3.3. Expérience avec réverbération	73
II.3.4. Robustesse de la méthode SVP	75
II.4. Emission de codes orthogonaux.....	80
II.5. Conclusion.....	88
Bibliographie	89
Chapitre III Caractérisation d'une cible élastique dans un guide d'onde en eau peu profonde par Décomposition de l'Opérateur Retournement Temporel	91
III.1. Position du problème et de sa géométrie	93
III.2. Cas d'un diffuseur ponctuel pseudo-isotrope	96
III.2.1. Théorie.....	96
III.3. Cas de 2 diffuseurs ponctuels pseudo-isotropes	102
III.4. Cas d'un diffuseur axisymétrique étendu ($2a > \lambda R/D$).....	104
III.4.1. Géométrie du problème	104
III.4.2. Analyse et théorie	104
III.4.3. Résultats expérimentaux.....	109
III.5. Conclusion	118
Annexe A : Première valeur singulière pour un diffuseur isotrope dans un guide d'onde	119
Annexe B : Calcul du terme de couplage entre h_s et $\partial_z h_s$	120
Bibliographie	122
Chapitre IV Décomposition de l'Opérateur Retournement Temporel appliqué à un système non stationnaire.....	123
IV.1. Position du problème	125
IV.2. Cible mobile en eau libre	129
IV.2.1. Acquisition séquentielle de la matrice de transfert K.....	129
IV.2.2. Acquisition « colonne par colonne » de la matrice de transfert K.....	135
IV.2.3. Utilisation des vecteurs singuliers pour retrouver le parcours de la cible ...	148
IV.3. Cible mobile en guide d'onde	154

IV.3.1. Géométrie de l'acquisition.....	154
IV.3.2. Ecriture de l'Opérateur de Retournement Temporel.....	155
IV.3.3. Résultats expérimentaux et simulations	158
IV.4. Détection en guide d'onde en présence de vagues.....	161
IV.4.1. Théorie	161
IV.4.2. Expériences en cuve	167
IV.5. Conclusion	170
Annexe A : Calcul des valeurs propres et vecteurs propres de l'ORT	172
Annexe B : Formulation de la base des vecteurs propres	175
Annexe C : Expression des valeurs propres de l'Opérateur de Retournement Temporel	177
Annexe D : Développement limité de l'Opérateur de Retournement Temporel en guide d'onde.....	177
Bibliographie	183
Conclusion et perspectives.....	185

Introduction

Les océans et les mers représentent près de trois quarts de la surface de la Terre et pourtant ces milieux restent aujourd'hui encore mal connus. En effet, l'étendue et la complexité du milieu marin nécessite de posséder des outils pour le sonder sur de longues distances et de grandes profondeurs. Si les techniques du RADAR et de l'imagerie optique ont permis d'explorer et de caractériser une grande partie de la surface émergée de notre planète, elles sont peu utiles pour la partie immergée du fait de la grande conductivité de l'eau qui atténue les ondes électromagnétiques sur de petite distance.

Au cours de la première guerre mondiale, Paul Langevin et l'ingénieur Chilowski comblent cette lacune en utilisant les découvertes de Jacques et Pierre Curie sur la piézo-électricité pour concevoir le premier SONAR. Celui-ci est un dispositif mono-élément permettant de détecter les sous-marins en utilisant la réflexion des ondes ultrasonore sur ceux-ci. Il montre ainsi que les ondes acoustiques sont un outil adapté à l'exploration du milieu marin. A partir de cette découverte, la simplicité d'utilisation des ondes ultrasonore a fait du SONAR, l'outil privilégié des marins. Celui-ci n'est plus restreint aux applications militaires mais est utilisé pour détecter des bancs de poissons, mesurer la bathymétrie des océans, il a même une application en géoacoustique pour sonder les profondeurs de la terre.

Depuis quelques années, la recherche se tourne de plus en plus vers l'utilisation de réseau constitué d'un grand nombre d'éléments piézo-électriques pour augmenter les performances de cette technique. L'utilisation d'un réseau de capteurs permet de détecter la position d'une cible sans nécessiter un balayage mécanique du faisceau ultrasonore. Ces réseaux multi-éléments ont donné lieu à la naissance de méthodes

d'imageries toujours plus complexes comme la formation de voies (*beamforming* en anglais) ou le traitement de champ adapté (ou *Matched Filter Processing*).

Le Retournement Temporel est une technique multi-éléments de plus en plus étudiée de nos jours et ce dans de nombreux pays. Cette méthode permet de focaliser une onde dans un milieu inconnu hétérogène en utilisant la propriété d'invariance par retournement temporel de l'équation des ondes. La formulation matricielle du Retournement Temporel a, à son tour, donné lieu à une technique élégante de détection multi-cibles, la méthode DORT (acronyme pour Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel). Cette méthode a déjà démontré son efficacité dans les applications en acoustique sous-marine comme la détection et la localisation en milieu « petits fonds » et ce même avec un fond rugueux. Cette thèse a donc pour objectif d'étudier les performances de la méthode DORT dans ce domaine.

Au cours de la thèse de Thomas Folégot, des expériences petites échelles ont été adaptées dans une optique d'utiliser la méthode DORT en mer. Depuis, cette thèse a donné lieu à la campagne en mer DOREV et de nombreuses avancées ont été faites au Laboratoire Ondes et Acoustique dans l'expérimentation en acoustique sous-marine. Ce présent manuscrit s'inscrit dans la continuité de ces travaux. Elle poursuit également le travail amorcé dans la thèse de Jean-Gabriel Minonzio sur la caractérisation des cibles. Ainsi nous traitons différents aspects de l'application de la méthode DORT à l'acoustique sous-marine qui n'ont pas encore été abordés.

Dans le chapitre I, nous introduisons la technique de Retournement Temporel et ses applications en milieu sous-marin. Nous faisons ensuite un historique de la méthode DORT et des différents travaux qui ont été réalisés ces dernières années en acoustique sous-marine.

Ensuite, le chapitre II débute par une présentation détaillée des outils théoriques qui nous serviront à maintes reprises au cours de ce manuscrit. Notamment la méthode DORT et les méthodes de calcul des fonctions de Green sont décrites. Après une présentation des différents codes numériques de simulation utilisés pendant cette thèse, nous introduisons une nouvelle technique de reconstruction des vecteurs propres temporels à partir des vecteurs propres monochromatiques issus de la Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel. Le chapitre se termine par l'étude de codages

spatio-temporels du champ acoustique pour effectuer l'acquisition de la matrice DORT le plus rapidement possible, mais également avec le meilleur RSB. On comprend que ce type de codage est essentiel en vue d'une application sous-marine où le niveau de bruit est élevé et le milieu est non stationnaire.

Dans le troisième chapitre, nous montrons que la méthode DORT permet d'extraire la signature fréquentielle de la cible très simplement malgré les réflexions multiples du champ acoustique sur les parois d'un guide d'onde. En effet, la décomposition du champ acoustique en modes normaux nous permet de montrer que les valeurs singulières de la matrice de transfert \mathbf{K} sont simplement reliées à la signature fréquentielle de la cible placée dans le guide d'onde.

Enfin, dans le dernier chapitre nous étudions les effets sur la méthode DORT des variations de la position de la cible ou de la profondeur du guide lors de l'acquisition des signaux acoustiques. Nous montrons que dans un tel cas, nous pouvons déduire de la décomposition en valeurs singulières de la matrice DORT des informations sur la perturbation comme par exemple le déplacement de la cible.

Chapitre I

Les techniques de Retournement Temporel en acoustique

Sommaire

1. Le Retournement Temporel	16
1.1. Principe du Retournement Temporel	16
1.2. Le Retournement Temporel en guide d'onde sous-marin	20
1.3. Le Retournement Temporel en guide non stationnaire	23
2. La méthode DORT	26
2.1. L'Opérateur Retournement Temporel et ses invariants	26
2.2. La méthode DORT en guide d'onde	27
Bibliographie	31

I.1. Le Retournement Temporel

I.1.1. Principe du Retournement Temporel

Les miroirs à conjugaison de phase furent développés dès les années 60 dans le domaine des micro-ondes et les années 70 en optique. Le principe de tels miroirs est de capter un signal monochromatique provenant d'une source et de réémettre son conjugué par un effet non linéaire, ce deuxième signal focalise alors sur la source initiale même si le milieu intermédiaire présente des hétérogénéités.

En 1989, Mathias Fink et son équipe ont généralisé ce concept aux signaux large bande en introduisant le principe du Retournement Temporel et de la cavité à Retournement Temporel^[1]. Le principe de la cavité à Retournement Temporel est présenté sur la figure 1.1. Le but de la méthode est de focaliser une onde à la position d'une source dans un milieu inconnu. Ce milieu peut être homogène ou présenter des inhomogénéités de célérité et/ou de densité. Dans une expérience de pensée où tout est idéal, en configuration « passive », la cavité à RT est constituée d'une infinité de capteurs qui enregistrent le signal provenant d'une source sur une surface fermée entourant celle-ci. Ce signal a traversé le milieu inhomogène et a été déformé par celui-ci. L'équation qui régit le comportement de l'onde dans un milieu linéaire non dissipatif est la suivante :

$$\rho_0(\mathbf{r})\nabla\cdot\left[\frac{1}{\rho_0(\mathbf{r})}\nabla P(\mathbf{r},t)\right]=\frac{1}{c^2(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 P(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

où $\mathbf{r}=(r, \theta, z)$, ρ_0 et c sont respectivement la densité et la vitesse du son au point considéré.

La présence d'une dérivée partielle en temps du second ordre dans l'équation d'onde assure l'invariance de celle-ci par passage de t à $-t$. Si la surpression acoustique $P(\mathbf{r},t)$ est solution de l'Eq.(1.1) , alors $P(\mathbf{r},-t)$ est aussi solution de l'équation d'onde. De ce fait, si on peut mesurer $P(\mathbf{r},t)$, l'onde divergente provenant de la source, sur la totalité de la surface fermée constituant la cavité à RT, alors la réémission de ce signal en

chronologie inverse à partir de cette même surface reconverge sur la source initiale. L'onde revit sa vie en sens inverse et focalise à l'endroit exacte de la cible aussi bien spatialement que temporellement. Cette focalisation spatio-temporelle est soumise à des conditions fortes de réciprocité spatiale du milieu de propagation et d'adiabaticité du processus. De plus, le milieu ne doit pas avoir changé entre l'acquisition de l'écho et la réémission de son retourné temporel (condition de stationnarité).

Si le milieu ne comporte pas de source mais un ou plusieurs diffuseurs, cette expérience peut être réalisée en mode « actif ». Dans ce cas, une étape est rajoutée dans l'expérience où une impulsion est émise dans le milieu et l'écho du diffuseur est alors utilisé comme signal à retourner temporellement. Ce mode d'acquisition est souvent appelé mode « pulse-écho ».

Une étude théorique de la focalisation par une cavité à RT est présentée en 1992 par Cassereau *et al.* qui expliquent les phénomènes physiques mis en jeu sous la lumière du principe de Huygens^[2]. Les auteurs montrent que la résolution est limitée par le fait que l'onde réémise ne s'arrête pas au moment de la focalisation mais continue de se propager. La tache focale est alors la superposition d'une onde convergente et d'une onde divergente. L'interférence de ces deux ondes fait que la taille de la tache focale est limitée par la demi-longueur d'onde.

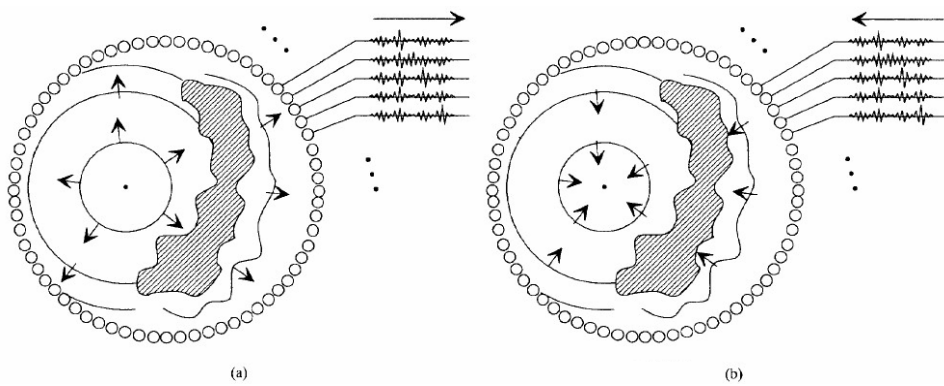


Fig.1.1 Schéma présentant une cavité à Retournement Temporel et son principe de fonctionnement. a) acquisition du signal provenant de la cible à travers le milieu aberrant, b) réémission du signal en chronologie inverse (extrait de Fink *et al.*^[3])

En pratique, cependant, il est impossible d'avoir une infinité de capteurs entourant le milieu à étudier. On utilise alors un Miroir à Retournement Temporel (MRT) qui consiste en un réseau de N transducteurs (souvent linéaire) jouant le rôle d'émetteurs et de récepteurs. La résolution acoustique étant liée directement à la longueur d'onde, on considère que le champ acoustique est bien échantillonné lorsque les transducteurs sont espacés de moins de la moitié de la plus petite longueur d'onde présente dans le champ de pression. La figure 1.2 montre le principe du MRT et les trois étapes d'une expérience classique en configuration « active » au travers d'un milieu faiblement abérateur. Il a été démontré expérimentalement que la refocalisation de l'onde était encore possible avec un MRT et cela malgré le fait que la connaissance du champ acoustique ne soit pas acquis tout autour de la source. La refocalisation n'est alors pas parfaite et la largeur de la tache de focalisation est supérieure à $\lambda/2$ et limitée par le critère de Rayleigh, soit $\lambda F/D$ où λ est la longueur d'onde, F est la distance de focalisation et D la taille du réseau.

Cette méthode permettant de focaliser facilement dans un milieu faiblement hétérogène a naturellement trouvé de nombreuses applications dans le domaine médical : comme la focalisation à travers la paroi crânienne^[4,5] ou en lithotripsie afin de détruire des calculs rénaux^[6].

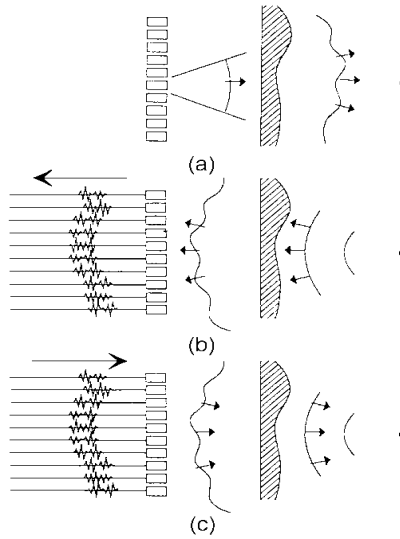


Fig.1.2 Schéma présentant les trois étapes de focalisation grâce à un Miroir à Retournement Temporel a) émission d'un front d'onde vers la cible à travers le milieu aberrant, b) enregistrement de l'écho, c) réémission du retourné temporel du signal enregistré.(extrait de Fink *et al.*^[3])

Lorsque le milieu étudié contient plusieurs cibles, la repropagation de l'écho enregistré par un MRT produit une onde qui, selon le principe de superposition, focalise sur les deux cibles en même temps. Cependant, on peut continuer à enregistrer la réponse du milieu à cette excitation et à réémettre le retourné temporel et répéter ces deux étapes indéfiniment. Cette succession d'émission-réception est appelée Retournement Temporel Itératif et Prada *et al.* montrent que le RT Itératif permet au bout d'un certain nombre de répétitions de ne focaliser que sur la cible la plus écho-gène^[7]. La figure 1.3 montre le résultat d'une seule itération du RT effectuée sur deux cibles. L'une des cibles est deux fois moins écho-gène que l'autre, ainsi, au bout d'une itération, le signal reçu sur le réseau provenant de cette cible est d'un niveau 4 fois plus faible que le signal de la cible principale. Intuitivement, il est facile de comprendre que la limite du processus de RT itératif est l'onde focalisant sur le diffuseur le plus fort.

Comme nous l'avons dit, le principe du Retournement Temporel a de nombreuses applications dans différents domaines. Nous avons vu que l'utilisation d'un MRT pouvait permettre de focaliser à travers un milieu présentant des hétérogénéités mais cela est aussi possible en milieu réverbérant. Cette propriété rend le Retournement Temporel particulièrement intéressant en contrôle non destructif dans des

configurations difficiles ou encore, comme nous allons le voir, en acoustique sous-marine en eau peu profonde où les chemins multiples et la réverbération provenant du fond marin rendent la focalisation d'une onde acoustique difficile par des méthodes conventionnelles comme la formation de voies.

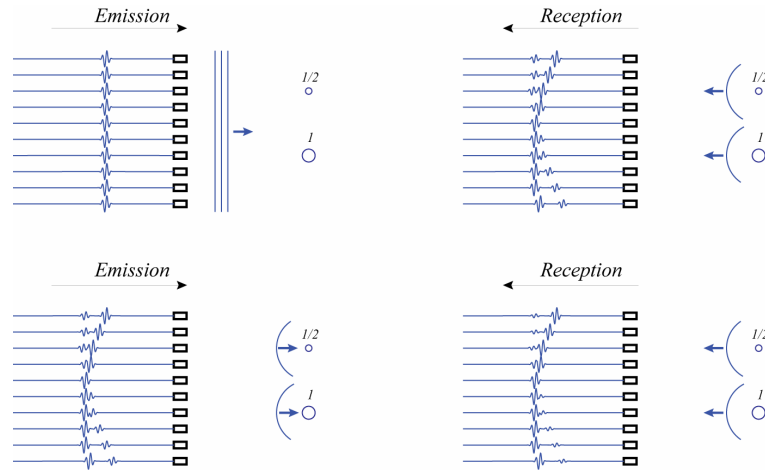


Fig.1.3 Description du processus de Retournement Temporel itératif pour deux cibles de réflectivité égale à 1 et 0,5. Le signal reçu après une succession d'émissions-réceptions converge vers la loi de phase permettant de focaliser sur la cible la plus écho-gène.

I.1.2. Le Retournement Temporel en guide d'onde sous-marin

Le premier article traitant de retournement temporel en guide d'onde est paru en 1991. Jackson *et al.* étudient les caractéristiques du RT en acoustique sous-marine dans l'optique de compenser et même de tirer parti des trajets multiples des ondes dans les milieux petits fonds inconnus^[8]. Au Laboratoire Ondes et Acoustique, Roux *et al.* présentent les premières expériences ultrasonores petite échelle pour étudier en laboratoire l'utilisation du RT en milieu petit fond. Comme décrit précédemment, la résolution d'un MRT est limitée par la longueur d'onde, la distance de propagation et la taille du réseau. Cependant les auteurs montrent que, lorsque l'on place un MRT dans un guide d'onde, celui-ci est capable de tirer parti des chemins multiples suivis par l'onde provenant de la source pour augmenter virtuellement sa taille. Les résultats de ces

expériences sont présentées sur la figure 1.4. Cet article explique l'amélioration de résolution par l'utilisation du théorème des images. Les expériences en mer étant coûteuses, ces expériences petite échelle fournissent un compromis très intéressant entre simulations numériques et expériences en mer. Ce principe d'expériences contrôlées précédant une série d'expérience en mer a inspiré les expériences présentées dans ce manuscrit.

En 1998, Kuperman *et al.* effectuent les premières expériences de Retournement Temporel en mer (réalisée en 1996) et prouvent qu'il est possible grâce au Retournement Temporel de focaliser une onde à une distance de plus de 6 km dans un guide d'onde de 100 m de profondeur^[9](cf. figure 1.5). Ils observent comme prédit par Roux *et al.* l'effet d'amélioration de la résolution grâce aux réflexions. L'expérience menée à 445 Hz montre également la robustesse du processus de focalisation par Retournement Temporel. En effet, ils réussissent à effectuer une refocalisation alors que 2 heures se sont écoulées entre l'acquisition de l'écho de la cible et sa réémission. Ils montrent aussi qu'il est possible de refocaliser en n'utilisant qu'une partie de l'antenne. Une seconde expérience dans la même gamme de fréquence réalisée en 1997 et publiée en 1998 montre une focalisation à plus de 30 km. Les auteurs observent aussi une refocalisation avec des signaux acquis une semaine auparavant^[10].

Continuant sur sa lancée, la même équipe effectue en 1999 des expériences de télécommunication utilisant un MRT constitué des transducteurs à plus haute fréquence (3,5 kHz) sur une distance de plus de 10 km^[11]. Cette série d'expériences montre l'efficacité du retournement temporel dans deux environnements présentant soit un fond absorbant soit réflecteur et compare ses performances à une émission monomode (appelée émission *broadside* par les auteurs).

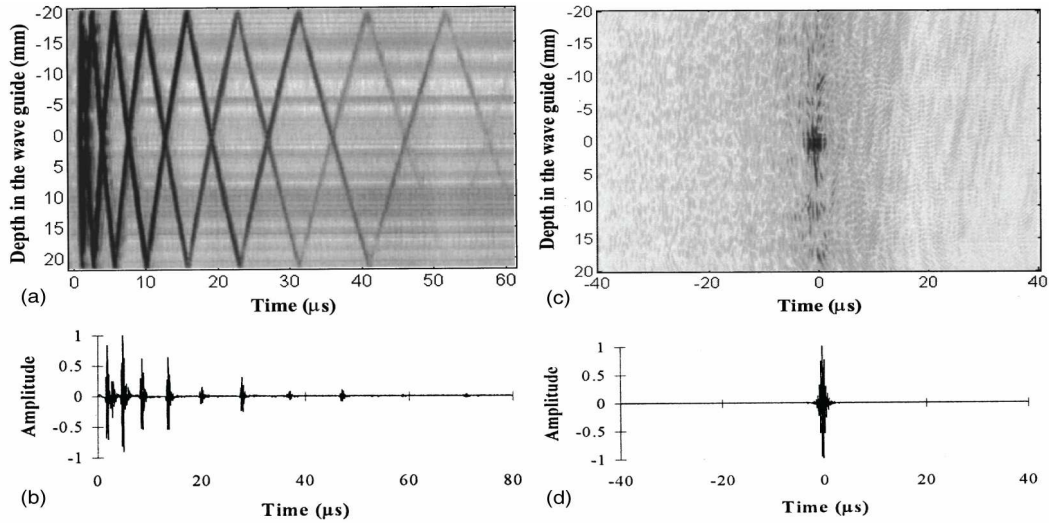


Fig.1.4 Démonstration de l'amélioration de la résolution spatiale d'une tache focale et recompression temporelle lors d'une expérience de Retournement Temporel en guide. a) Bscan reçu sur le réseau, b) signal temporel reçu sur une seule voie, c) scan de la hauteur d'eau au niveau de la cible en fonction du temps et de la profondeur après réémission du retourné temporel, d) signal temporel à l'endroit de la cible (extrait de Roux *et al.*).

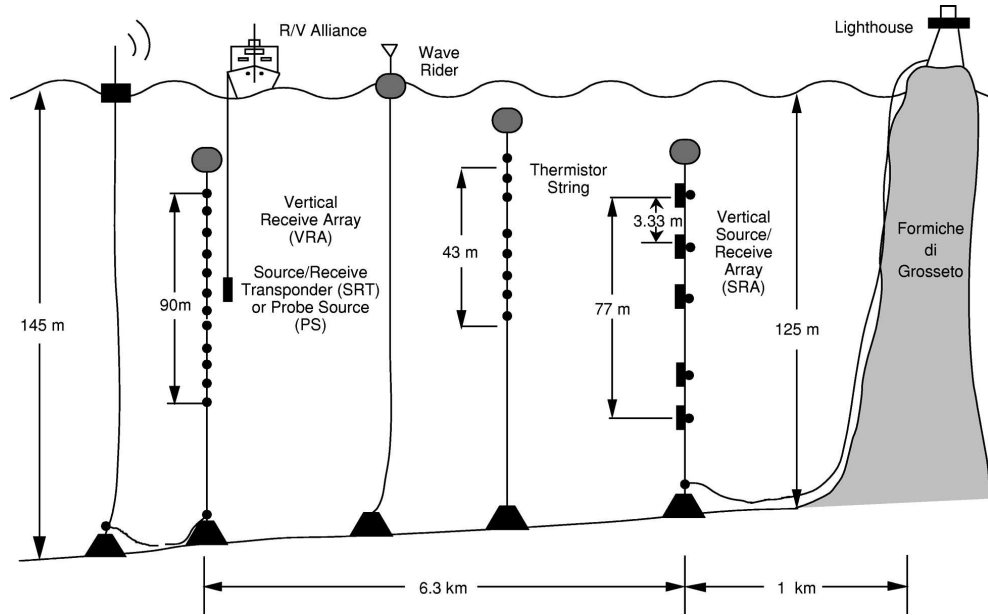


Fig.1.5 Schéma présentant les caractéristiques de l'expérience présentée par Kupperman et l'équipe du Scripps(extrait de Kupperman *et al.*)

I.1.3. Le Retournement Temporel en guide non stationnaire

Dans les années qui suivirent, de plus en plus de travaux théoriques et expérimentaux ont eu trait au retournement temporel, étudiant notamment les cas où le principe fondateur de la méthode, qui est un milieu invariant entre l'acquisition de la réponse de la cible et sa réémission en chronologie inverse, est mis en défaut. En 1998, Hodgkiss *et al.* montrent qu'il est possible de déplacer la tache de focalisation en RT jusqu'à 10% de la distance totale entre la source et le réseau grâce à un décalage de la fréquence du signal émis. Selon les auteurs, cette propriété pourrait être utilisée pour permettre la focalisation d'un signal acquis en mer puis réémis plusieurs jours plus tard dans un milieu dont les caractéristiques auraient changé^[10]. Le caractère non stationnaire du guide est alors dû principalement à la fluctuation du profil de célérité du milieu marin.

Roux *et al.*, quant à eux, étudient expérimentalement l'effet de vagues sur la refocalisation du retourné temporel^[12]. Dans ces expériences, la surface est perturbée par la génération de vagues allant de la cible au réseau à une fréquence de 15 Hz. Celle-ci est considérée comme une surface rugueuse statique changeant entre l'acquisition du

signal et la réémission du retourné temporel. La symétrie du processus n'étant plus assurée, les auteurs mettent en évidence une dégradation de la focalisation ainsi qu'une diminution de l'amplitude au point focal après réémission du retourné temporel.

En 2004, Sabra *et al.* présentent deux articles théoriques analysant les performances d'un MRT lorsque le réseau est soumis à des changements dans la position de ses éléments et lorsque la cible est animée d'un mouvement ajoutant un effet doppler aux données^[13,14]. Dans chaque cas, une expression analytique du champ acoustique produit est calculée à l'aide de la méthode de décomposition en modes normaux (la méthode sera présentée dans le chapitre II). Pour le cas du réseau subissant une déformation, les résultats simulés prédisent une perte d'amplitude qui est plus importante lorsque les éléments du réseau subissent un déplacement longitudinal par rapport au cas où ceux-ci se déplacent verticalement (figure 1.6). Le deuxième cas montre une perte de cohérence non négligeable lorsque la cible s'éloigne du réseau vertical horizontalement ou oscille verticalement (figure 1.7)(Les distances étant ramenées à la composante horizontale ou verticale du nombre d'onde).

L'objectif du dernier chapitre de cette thèse est d'adapter ce type de démarche à la méthode de Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel que nous présentons maintenant.

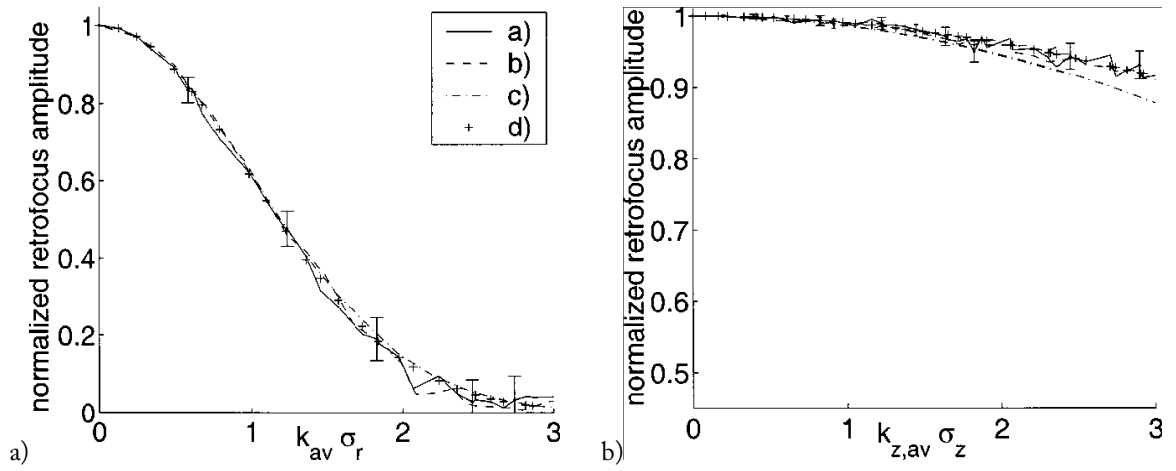


Fig.1. 6 Perte d'amplitude au point de focalisation en fonction de l'écart type des déplacements normalisés par le nombre d'onde moyen lorsque les éléments du réseau se sont déplacés entre l'étape d'acquisition et la réémission a) horizontalement dans le plan réseau/cible b) verticalement (extrait de Sabra *et al.* [13])

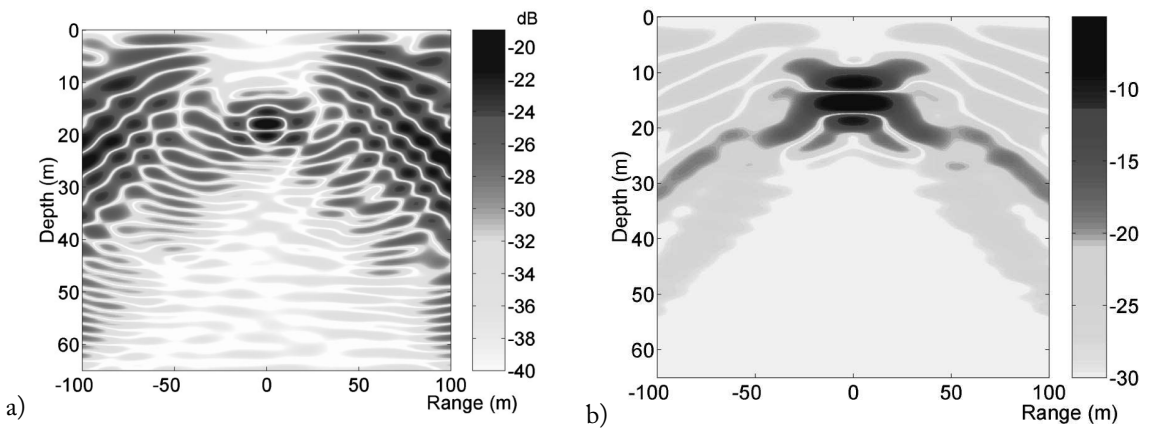


Fig.1.7 Différence de focalisation entre la méthode de Retournement Temporel appliquée à une cible immobile et une cible a) s'éloignant du réseau à la vitesse de 20 m/s b) oscillant verticalement (extrait de Sabra *et al.* [14])

I.2. La méthode DORT

La méthode de Décomposition de L'Opérateur Retournement Temporel (DORT) est une technique émergeant de l'analyse du processus de retournement temporel itératif avec une approche matricielle. Une description complète de la méthode DORT est présentée dans le chapitre suivant, de ce fait, nous ne faisons ici qu'un bref historique.

I.2.1. L'Opérateur Retournement Temporel et ses invariants

Comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, au bout d'un certain nombre d'itérations du processus de RT, la loi de phase acquise par le réseau permet de focaliser sur la cible la plus échogène. Ce signal est un invariant du processus de RT car il ne varie plus lorsqu'il est émis dans le milieu et reçu sur la barrette. Comme nous le verrons plus tard, ce processus est entièrement décrit par l'Opérateur de Retournement Temporel (ORT) défini comme le produit matriciel $\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K}$ avec \mathbf{K} , la matrice inter-élément du réseau de transducteurs.

Les observations précédentes ont abouti à la conclusion suivante : dans un milieu contenant une ou plusieurs cibles bien résolues, les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K}$ associés à une valeur propre non nulle sont les invariants du processus de Retournement Temporel et en tant que tels permettent de focaliser séparément sur chacune des cibles. Ainsi lors d'une expérience DORT idéale, le nombre de valeurs propres non nulles correspond au nombre de cibles résolues dans le milieu et chaque vecteur propre associé fournit la loi de phase et d'amplitude permettant de focaliser sur la cible correspondante.

La méthode DORT permet de séparer l'information acquise par le réseau de transducteurs en espace « signal » et espace « bruit » et de localiser des cibles en milieu très bruité. Ainsi elle a été utilisée avec succès au LOA en contrôle non destructif par Kerbrat *et al.* sur des billettes de titane présentant une microstructure échogène^[15]. Dans le même domaine, elle a aussi permis la séparation des échos des différents modes d'ondes de Lamb générés dans un cylindre en acier^[16].

Plus récemment, Chambers *et al.*^[17,18] puis Jean-Gabriel Minonzio lors de sa thèse ont ouvert la voie de la caractérisation de cibles en eau libre grâce à la méthode

DORT^[19]. Notamment, ce dernier fait une analyse complète des valeurs singulières de \mathbf{K} pour un tube, un cylindre ou une sphère élastique. Il montre que les valeurs singulières sont reliées à la décomposition en harmoniques sphériques du champ acoustique rétrodiffusé et que les vecteurs propres sont des combinaisons des projections de ces modes sur le réseau comme représenté sur la figure 1.8.

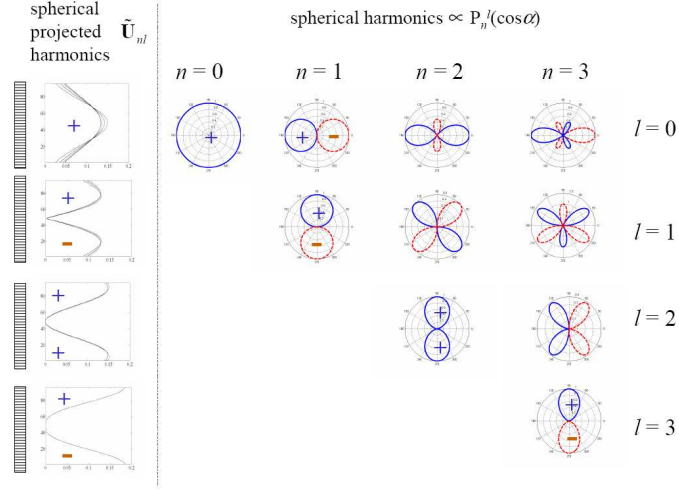


Fig.1.8 Décomposition des harmoniques sphériques projetées sur le réseau relié à la forme des vecteurs propres obtenus par la méthode DORT en eau libre.(extrait de Minonzio *et al.*^[20])

Ses travaux ont à leur tour motivé l'étude présentée dans le chapitre III sur la caractérisation en guide d'onde. Minonzio *et al.* présentent aussi une étude des valeurs propres lorsque la diffusion multiple entre deux cibles est significative.

I.2.2. La méthode DORT en guide d'onde

Comme toute méthode fondée sur le Retournement Temporel, la méthode DORT trouve tout son intérêt dans les milieux dispersifs où les fonctions de Green sont complexes comme dans le cas des guides d'onde et notamment en acoustique sous-marine. Très tôt, en 1999, Mordant *et al.* montrent l'efficacité de la méthode DORT pour des applications en détection sous-marine et mesurent l'effet des vagues de différentes amplitudes sur les invariants de l'ORT^[21]. Les auteurs présentent aussi la

première reconstruction de vecteurs propres temporels sans en expliquer la méthode. Nous le faisons donc dans le chapitre suivant.

Par la suite, Thomas Folégot étudie dans sa thèse l'adaptation des expériences petites échelles aux expériences en mer et présente les difficultés qui peuvent surgir dans les conditions réelles. Notamment, il montre numériquement la stabilité de la refocalisation des vecteurs propres lorsque la cible bouge pendant l'acquisition. Il étudie deux cas :

- la cible se déplace horizontalement en s'éloignant du réseau vertical et
- la cible se déplace perpendiculairement au plan réseau/cible.

La conclusion est que ces deux types de mouvement n'ont que peu d'impact sur la méthode DORT.

Une série d'expériences est aussi réalisée en guide d'onde à fond rugueux présentant une forte réverbération^[22,23]. Ces études donnent lieu à la création des signaux orthogonaux AIRS en vue d'une acquisition instantanée de la matrice de transfert \mathbf{K} ^[24].

Aux Etats-Unis, au Scripps Institute, Song *et al.* proposent en 2004 une méthode dérivée de la méthode DORT pour améliorer la détection en milieu réverbérant en émettant une onde projetée sur l'espace complémentaire à l'espace « source » correspondant au fond réverbérant^[25].

Ces études ont ouvert la voie aux expériences en milieu réel comme celle réalisée par Gaumond *et al.* dans le canyon de l'Hudson en 2004^[26]. Les auteurs étudient l'effet du bruit sur les valeurs singulières et démontrent la faisabilité de la méthode DORT en eau peu profonde malgré le handicap de la méthode dû à un temps d'acquisition long. Cette expérience est réalisée à l'aide de 64 transducteurs fonctionnant entre 500 Hz et 3500 Hz et d'un répéteur d'écho. Cependant seules quatre émissions sont envoyées pour acquérir la matrice \mathbf{K} .

L'année suivante Claire Prada et son équipe réalisent une campagne similaire dans la baie de Ste Anne du Portzic en rade de Brest^[27]. Ils utilisent la totalité du réseau de 24 éléments fonctionnant à 12 kHz présenté sur la figure 1.9 dans un guide d'onde d'environ 10 m de profondeur sur une distance allant de 140 à 250 m.

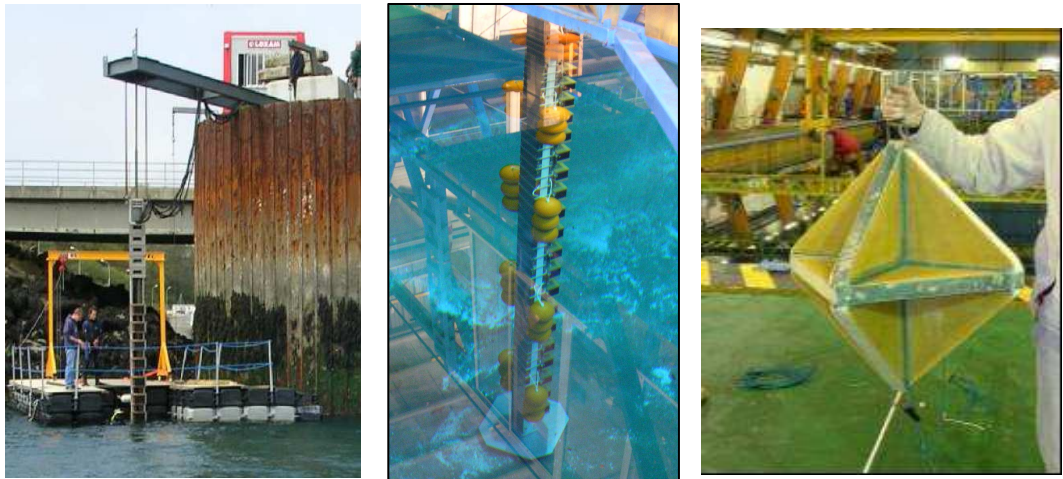


Fig.1.9 Digue de Ste Anne du Portzic, antenne constituée de 24 éléments émetteurs-récepteurs de fréquence centrale 12kHz et cible TCAR

Plusieurs techniques sont utilisées dans cet article. Pour détecter la position de la cible, les auteurs extraient des données la distance où se trouve la ou les cibles. Pour cette distance, les valeurs singulières sont tracées en fonction de la fréquence (*cf.* figure 1.10a) puis les vecteurs propres associés sont repropagés (par une technique de traitement de champ adapté pour la formation d'image) soit dans un modèle en eau libre soit dans un modèle plus complet prenant en compte la géométrie du guide (*cf.* figure 1.10b). Les données acquises lors de cette campagne montre l'efficacité de la méthode DORT à détecter et séparer deux cibles dans un milieu inconnu. De plus, une série d'acquisitions a été faite dans une configuration où la réverbération est significative, les auteurs montrent que la méthode DORT parvient à séparer le signal provenant de la cible du signal provenant du fond réverbérant.

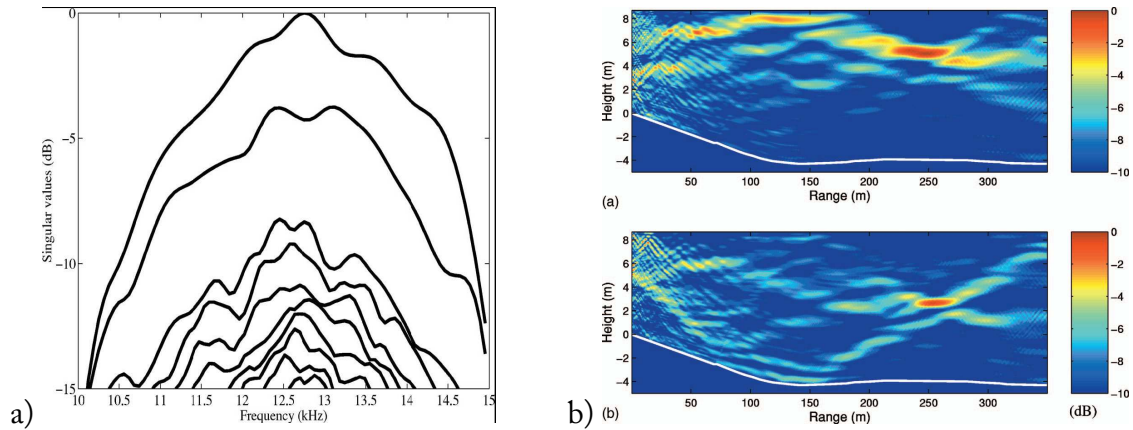


Fig.1.10 Données acquises lors de la campagne DOREV par l'équipe du LOA. Les figures montrent a) les valeurs singulières de la matrice de transfert pour 2 cibles situés à 253 m en fonction de la fréquence b) leur repropagation dans un modèle numérique. (extrait de Prada *et al.*^[27])

Citons aussi Pinçon *et al.*^[28] qui réalisent en 2006 une étude mathématique exhaustive de la focalisation des vecteurs propres de l'ORT dans un guide d'onde.

La richesse de la littérature concernant les techniques de Retournement Temporel fait qu'il serait impossible d'en faire une énumération complète dans un nombre de page raisonnable. Nous avons préférés donner au lecteur un aperçu de la diversité des recherches qui ont déjà été faites dans le domaine. De nombreuses références sont ajoutées dans la suite de ce manuscrit au fur et à mesure que nous entrons plus profondément dans le sujet.

Bibliographie

- ¹ M. Fink, C. Prada, F. Wu, and D. Cassereau, "Self focusing with time-reversal mirror in inhomogeneous media," in Proc. IEEE Ultrason. Symp. 1989, Montreal, PQ, vol.2, pp.681-686 1989
- ² D. Cassereau et M. Fink, "Time-reversal of the Ultrasonics Fields – Part III: Theory of the Closed Time-Reversal Cavity", IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. **39**(5), 579-592(1992)
- ³ M. Fink, "Time-reversal of the Ultrasonics Fields – Part I: Basic Principles", IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. **39**(5), 555-566(1992)
- ⁴ J.-L. Thomas and M. A. Fink, "Ultrasonic Beam Focusing Through Tissue Inhomogeneities with a Time Reversal Mirror: Application to Transskull Therapy", IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr., **43**(6), 1122-1129(1996)
- ⁵ M. Pernot, JF. Aubry, M. Tanter, AL. Boch, F. Marquet, M. Kujas, D. Seilhean, M. Fink, "In-vivo transcranial brain surgery with an ultrasonic time reversal mirror", J. Neurosurg., **106**, 1061-1066(2007).
- ⁶ J.-L. Thomas, F. Wu, M. Fink, "Time reversal focusing applied to lithotripsy", Ultrasonic Imaging, **18**, 106-121, (1996).
- ⁷ C.Prada, F. Wu, and M. Fink, "The iterative time reversal mirror: A solution to self-focusing in the pulse echo mode," J. Acoust. Soc. Am. **90**(2), 1119-1129, (1991).
- ⁸ D.R. Jackson and D.R. Dowling, "Phase conjugaison in underwater acoustics", J. Acoust. Soc. Am. **89**(1), 171-181(1991)
- ⁹ W.A. Kuppermann, W.S. Hodgkiss and H. C. Song, "Phase conjugation in the ocean: Experimental demonstration of an acoustic time-reversal mirror", J. Acoust. Soc. Am. **103**(1) 23-40(1998)
- ¹⁰ W. S. Hodgkiss, H. C. Song, W. A. Kuperman, T. Akal, C. Ferla, and D.R. Jackson, "A long-range and variable focus phase conjugation experiment in shallow water," J. Acoust. Soc. Am. **105**, 1597–1604,(1998).
- ¹¹ G.F. Edelmann, T. Akal, W.S. Hodgkiss, S. Kim, W.A. Kuperman, and H.C. Song, "An Initial Demonstration of Underwater Acoustic Communication Using Time Reversal", IEEE J. Ocean. Eng. **27**, 602–609(2002)
- ¹² P. Roux et M. Fink, " Time reversal in a waveguide: Study of the temporal and spatial focusing", J. Acoust. Soc. Am. **107**(5), 2418–2429 (2000).
- ¹³ K.G. Sabra, D.R. Dowling, "Effects of time-reversing array deformation in an ocean wave guide", J. Acoust. Soc. Am., **115**(6), 2844 – 2847 (2004)
- ¹⁴ K.G. Sabra, D.R. Dowling, "Broadband performance of a time reversing array with a moving source", J. Acoust. Soc. Am., **115**(6), 2807 – 2817 (2004)

- ¹⁵ E. Kerbrat, C. Prada, D. Cassereau and M. Fink, "Ultrasonic non destructive testing of scattering media using the Decomposition of the Time Reversal Operator", IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. **49**(8), 1103-1113 (2002).
- ¹⁶ E. Kerbrat, D. Clorennec, C. Prada, D. Royer, D. Cassereau, M. Fink, "Detection of cracks in a thin air-filled hollow cylinder by application of the DORT method to elastic components of the echo", Ultrasonics **40**, 715-720 (2002).
- ¹⁷ D. H. Chambers and A. K. Gautesen, "Time reversal for a single spherical scatterer", J. Acoust. Soc. Am., **109** 2616–2624(2001)
- ¹⁸ D. H. Chambers, "Analysis of the time-reversal operator for scatterers of finite size", J. Acoust. Soc. Am., **112** 411 -419(2002)
- ¹⁹ J.-G. Minonzio, "Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel appliqué à l'imagerie et à la caractérisation ultrasonore", Thèse de l'Université Paris 7 - Denis Diderot, Décembre 2006
- ²⁰ J.-G. Minonzio, F. D. Philippe, C. Prada, M. Fink, "Characterization of an elastic cylinder and an elastic sphere with the time-reversal operator: application to the sub-resolution limit", Inverse Problems, **24**, 2008
- ²¹ N. Mordant, C. Prada, and M. Fink, "Highly resolved detection and selective focusing in a waveguide using the D.O.R.T. method," J. Acoust. Soc. Am. **105**, 2634–2642 (1999).
- ²² T. Folégot, "Détection par Décomposition de l'Opérateur Retournement Temporel en acoustique sous-marine par petits fonds", Thèse de l'Université Denis Diderot, Mars 2003
- ²³ T. Folégot, C. Prada, and M. Fink, "Resolution enhancement and separation of reverberation from target echo with the time reversal operator decomposition," J. Acoust. Soc. Am. **113**, 3155–3160 (2003).
- ²⁴ T. Folégot, J. de Rosny, C. Prada, and M. Fink, "Adaptive instant record signals applied to detection with time reversal operator decomposition", J. Acoust. Soc. Am. **117**(5), 3757–3765 (2005).
- ²⁵ H.C. Song, W.S. Hodgkiss, W.A. Kuppermann, K.G. Sabra, T Akal, and M. Stevenson, "Passive reverberation nulling for target enhancement", J. Acoust. Soc. Am. **122**(6), 3296–3303 (2007).
- ²⁶ C.F. Gaumond, D. M. Fromm, J. F. Lingeitch, R. Menis, G. F. Edelmann, D. C. Calvo, and E. Kim, "Demonstration at sea of the decomposition-of-the-time-reversal-operator technique," J. Acoust. Soc. Am. **119**, 976–990 (2006).
- ²⁷ C. Prada, J. De Rosny, D. Clorennec, J. G. Minonzio, A. Aubry, M. Fink, L. Bernière, S. Hibral, P. Billand, and T. Folégot, "Experimental detection and focusing in shallow water by Decomposition of the Time Reversal Operator," J. Acoust. Soc. Am. **122**, 768–761 (2007).
- ²⁸ B. Pinçon et K. Ramdani, " Selective focusing on small scatterers in acoustic waveguides using time reversal mirrors", Inverse Problems **23**, 1–25 (2007).

Chapitre II

Guide d'onde et Décomposition de l'Opérateur Retournement Temporel

Sommaire

1. Fonctions de Green en guide d'onde	35
1.1. Rappel sur la théorie des ondes	35
1.2. Méthode des images	37
1.3. Méthode des modes normaux	42
2. Le principe du Retournement Temporel en mode échographique	52
2.1. La matrice de transfert K.....	52
2.2. L'opérateur de Retournement Temporel	54
2.3. Repropagation des vecteurs propres monochromatiques.....	59
3. Reconstruction des vecteurs propres temporels en guide d'onde pour la télécommunication	66
3.1. Position du problème en guide d'onde	66
3.2. Utilisation en mer	72
3.3. Expérience avec réverbération	73
3.4. Robustesse de la méthode SVP	75
4. Emission de codes orthogonaux	80
5. Conclusion	88
Bibliographie	89

La méthode de Décomposition de l'Opérateur Retournement Temporel (DORT) qui est l'objet de cette thèse est une méthode de détection ultrasonore active utilisant un réseau de transducteurs pour insonifier le milieu à étudier. Elle est basée comme son nom l'indique sur une analyse mathématique du principe de Retournement Temporel et de ce fait est d'autant plus efficace lorsqu'elle est utilisée dans un milieu complexe. Ses domaines d'applications seront alors tout naturellement le contrôle non destructif dans des matériaux microstructurés^[1] ou la détection de plusieurs cibles dans un guide d'onde en acoustique sous-marine^[2-5] et elle a aussi été utilisée pour séparer les différents modes de Lamb d'un cylindre élastique^[6] ou pour localiser une cible enterrée^[7]. On peut noter aussi que la méthode DORT n'est pas restreinte aux seules ondes acoustiques et que son application aux ondes électromagnétiques a fait l'objet de nombreuses études ces dernières années.

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons plus particulièrement aux utilisations de la méthode en acoustique sous-marine dans un milieu dit « petit fond » modélisé par un guide d'onde à interfaces parallèles. Par conséquent, afin de rendre accessible la lecture de ce manuscrit au plus grand nombre de personnes, les sections suivantes présentent quelques rappels sur la diffusion acoustique dans un guide d'onde. Nous allons ainsi présenter deux méthodes de calcul fondamentales en acoustique sous-marine, c'est-à-dire la méthode dite des images et la méthode de décomposition en modes normaux. Ces deux méthodes seront utilisées de manière intensive dans les chapitres III et IV. Par la suite, dans la section II.2, l'Opérateur de Retournement Temporel (ORT) et l'étude de ses invariants sont présentés ainsi qu'une nouvelle méthode de reconstruction des vecteurs propres temporels qui sont nécessaires pour les applications de la méthode DORT en télécommunication.

II.1. Fonctions de Green en guide d'onde

II.1.1. Rappel sur la théorie des ondes

En acoustique, que ce soit dans le but de détecter ou de caractériser une cible, l'analyse théorique a pour point de départ le calcul de la fonction de Green entre un point du milieu et une source. En effet, la fonction de Green est cruciale dans la connaissance du champ acoustique total du milieu. C'est pourquoi, dans la suite, nous rappelons brièvement la définition de la fonction de Green en commençant tout naturellement par l'équation d'onde.

L'équation d'onde avec terme source s'écrit^[8] :

$$\nabla^2 P(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -F(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

aussi appelé équation d'onde inhomogène.

Les solutions peuvent s'écrire dans la base des fonctions harmoniques pour le champ de pression et la source et la dépendance temporelle est alors donnée par un terme en $e^{-i\omega t}$ soit :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}, t) &= p(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \\ F(\mathbf{r}, t) &= f(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c} \\ \left[\nabla^2 + k(\mathbf{r})^2 \right] p(\mathbf{r}, \omega) &= -f(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned} \quad (2.2)$$

appelé équation de Helmholtz inhomogène .

Pour un point source, on remplace $f(\mathbf{r}, \omega)$ par la fonction de Dirac spatiale, appelée fonction « delta » $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$. La fonction delta a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) &= 0 \text{ pour } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0, \\ \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) dV &= 1, \\ \int g(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) dV &= g(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

où dV est l'élément de volume et le volume d'intégration inclus le point $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$.

Bien que la fonction delta ne soit pas une fonction analytique en elle-même, le passage à la limite de certaines fonctions fournit une forme analytique de la fonction delta, par exemple :

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin(ax)}{\pi x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{ixt} dt. \quad (2.4)$$

On appelle fonction de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ la solution de l'équation de Helmholtz inhomogène pour un point source :

$$\left[\nabla^2 + k(\mathbf{r})^2 \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (2.5)$$

Dans un milieu infini homogène, c'est-à-dire lorsque $k(\mathbf{r}) = k$, la solution de l'Eq.(2.5) est appelée fonction de Green en eau libre, dont la formulation analytique est la suivante :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (2.6)$$

Soit pour $\mathbf{r}_0=0$, l'équation typique d'une onde sphérique divergente.

Une fois, la fonction de Green calculée. Le théorème de Green permet d'exprimer le champ de pression $p(\mathbf{r})$ pour un terme source $f(\mathbf{r}_0)$ en tout point du milieu grâce à la formule :

$$p(\mathbf{r}) = \underbrace{\int_{V_0} f(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV}_{\text{terme de source}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial p(\mathbf{r}_0)}{\partial n} - p(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} \right] dS_0}_{\text{terme provenant des conditions limites}} \quad (2.7)$$

Ce qui nous permet d'exprimer le champ total comme étant la somme d'une intégrale de volume de la fonction de source et d'une intégrale de surface sur les conditions aux limites choisies. Le rôle critique que joue la fonction de Green dans la détermination de la solution globale démontre que la connaissance de la réponse d'un système physique à une source impulsionnelle est primordiale dans la recherche de la

réponse de ce système pour une source quelconque. Même si le calcul en lui-même des intégrales de volume et de surface peut parfois se révéler non trivial, souvent la part la plus difficile du processus entier de description du comportement d'un système physique est bien la détermination de la fonction de Green. C'est pourquoi dans les sections suivantes nous allons présenter les deux méthodes les plus utilisées pour calculer la fonction de Green dans un guide d'onde.

II.1.2. Méthode des images

La méthode des images est un moyen permettant de calculer la fonction de Green d'un système particulièrement facile à mettre en œuvre dans les problèmes en milieux homogènes comportant une ou plusieurs interfaces planes avec conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann.

Cette méthode consiste à exprimer la fonction de Green comme la somme d'une fonction de Green en espace libre et des contributions d'une ou plusieurs sources virtuelles (ou images) qui sont à l'extérieur de la zone étudiée^[8,9].

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \sum_{i=1}^N \text{sign}_i \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \quad (2.8)$$

où sign_i est le signe de la $i^{\text{ème}}$ source virtuelle.

Il n'y a pas de méthode globale pour déterminer la position et le signe des images sources dans le cas général, cependant dans les cas suivants ce problème devient relativement simple.

1.2.1. Méthode des images appliquée à un guide d'onde parfait

On considère ici un guide d'onde constitué d'une couche de fluide homogène possédant deux interfaces impénétrables (condition de Neumann). La géométrie du problème est indiquée sur la figure 2.1. On ajoute tout d'abord une source virtuelle S_{02} positionnée symétriquement à la source réelle par rapport à l'interface d'équation $z = h$. La condition à cette interface étant une condition de Neumann, on cherche la fonction

de Green G telle que $\partial G(r, r_0) / \partial z = 0$ pour $z = h$. Pour une condition de Neumann, il faut attribuer le même signe aux deux sources, on a donc :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR_{01}}}{R_{01}} + \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR_{02}}}{R_{02}} + \dots, \quad (2.9)$$

où

$$R_{01} = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}, \quad R_{02} = \sqrt{r^2 + (z + z_0 - 2h)^2}. \quad (2.10)$$

Soit

$$\left. \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial z} \right|_{z=h} = \frac{1}{4\pi} \left\{ (z - z_0) \frac{e^{ikR_{01}}}{R_{01}^2} \left[ik - \frac{1}{R_{01}} \right] + (z + z_0 - 2h) \frac{e^{ikR_{02}}}{R_{02}^2} \left[ik - \frac{1}{R_{02}} \right] \right\}_{z=h} = 0 \quad (2.11)$$

comme voulu. Cette fonction de Green satisfait la condition de Neumann à l'interface d'équation $z = h$ mais pas à l'interface d'équation $z = 0$. Pour cela, il faut rajouter deux sources S_{03} et S_{04} placées symétriquement par rapport à cette interface et de même signe encore une fois. Le champ de pression $p(\mathbf{r})$ sur le récepteur créé par une source ponctuelle monochromatique placée en $r = 0$ et $z = z_0$ est donc :

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{ikR_{01}}}{R_{01}} + \frac{e^{ikR_{02}}}{R_{02}} + \frac{e^{ikR_{03}}}{R_{03}} + \frac{e^{ikR_{04}}}{R_{04}} + \dots \right], \quad (2.12)$$

où

$$\begin{aligned} R_{01} &= \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}, \quad R_{02} = \sqrt{r^2 + (z + z_0 - 2h)^2}, \\ R_{03} &= \sqrt{r^2 + (z + z_0)^2}, \quad R_{04} = \sqrt{r^2 + (z - z_0 + 2h)^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Cette combinaison satisfait l'équation des ondes et la condition aux limites à l'interface supérieure mais pas celle à l'interface inférieure. On réitère la procédure

jusqu'à avoir une somme infinie de termes qui satisfait à la fois l'équation d'ondes et la condition aux limite aux deux interfaces :

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{ikR_{n1}}}{R_{n1}} + \frac{e^{ikR_{n2}}}{R_{n2}} + \frac{e^{ikR_{n3}}}{R_{n3}} + \frac{e^{ikR_{n4}}}{R_{n4}} \right], \quad (2.14)$$

où

$$\begin{aligned} R_{n1} &= \sqrt{r^2 + (z - z_0 - 2nh)^2}, \quad R_{n2} = \sqrt{r^2 + (z + z_0 - 2(n+1)h)^2}, \\ R_{n3} &= \sqrt{r^2 + (z + z_0 + 2nh)^2}, \quad R_{n4} = \sqrt{r^2 + (z - z_0 + 2(n+1)h)^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

De plus, la somme est convergente parce que chaque source additionnelle à une amplitude décroissante due à la distance de propagation croissante. Chaque terme de la somme peut être considéré comme une onde arrivant sur le récepteur en ayant subi un certain nombre de réflexions comme présenté en rouge sur la figure 2.1.

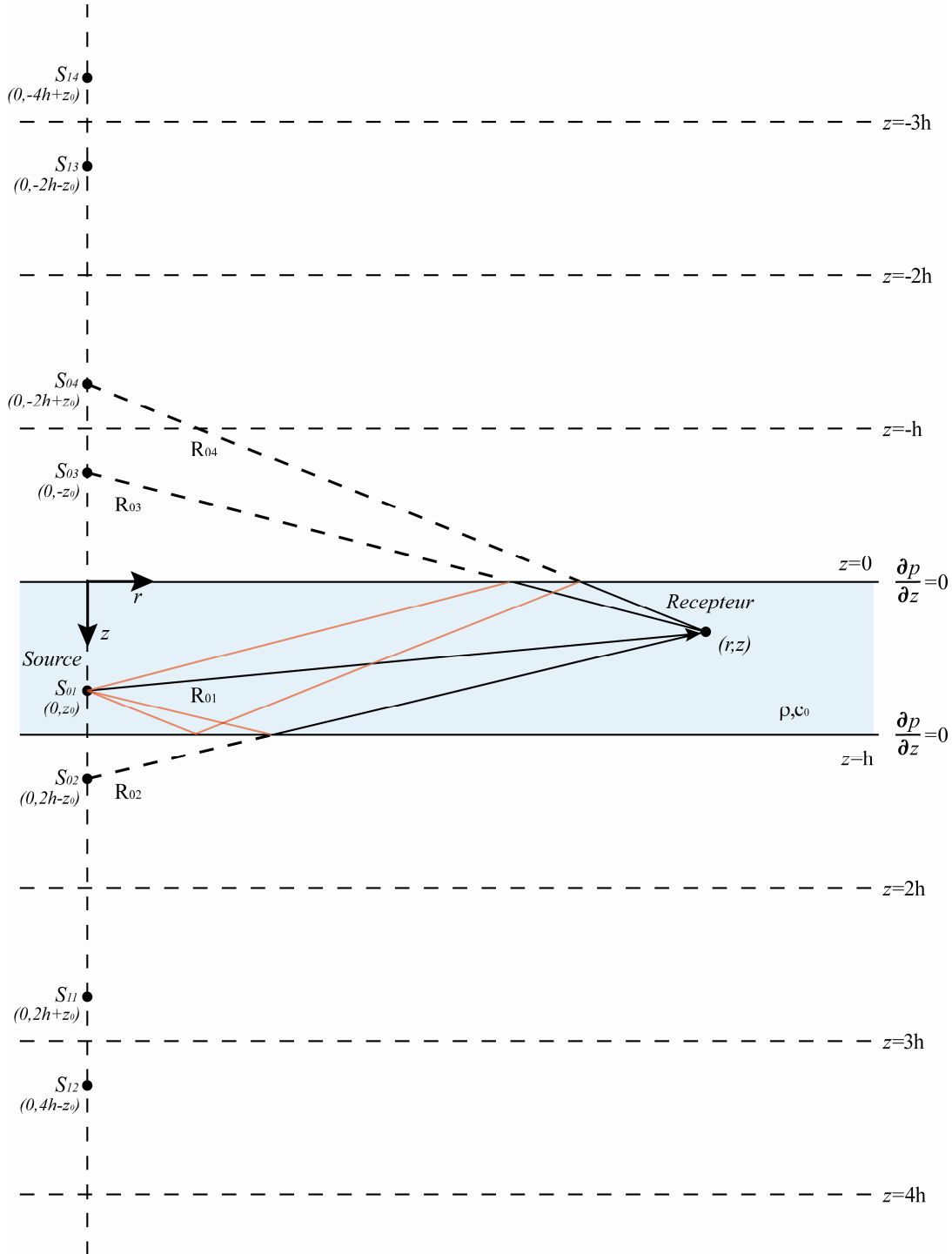


Fig.2.1 Positions des sources virtuelles pour la *méthode des images* dans le cas d'une source ponctuelle dans un guide d'ondes homogène avec conditions de Neumann aux interfaces. (Remarque : Les positions seront les mêmes pour tout problème présentant des interfaces planes et parallèles, seuls les signes devant les fonctions de Green des images changeront)

Cette représentation est souvent utilisée pour expliquer le phénomène de super-résolution que l'on obtient lorsqu'on utilise une technique basée sur le Retournement Temporel dans un guide d'onde. On qualifie de super-résolution le fait de pouvoir focaliser une onde sur une zone plus petite que la tache théorique prédite par le critère de Rayleigh, *i.e.* pour une lentille d'ouverture d , la limite de focalisation d'une onde de longueur d'onde λ à la distance L est $\frac{\lambda L}{d}$. Dans le cas de la méthode DORT, le réseau jouant le rôle de lentille a une ouverture d souvent égale à la profondeur du guide et en appliquant le théorème des images, on comprend vite en intervertissant les rôles de la source et du récepteur dans le schéma sur la figure 2.1 que la source « voit » un réseau virtuel dont la taille est multipliée par le nombre de réflexions¹ que l'on prend en compte dans le calcul et donc la tâche de focalisation est réduite du même facteur et sa largeur devient $\frac{\lambda L}{N_{ref} d}$.

1.2.2. Méthode des images appliquées à un guide d'onde océanique

Pour un guide d'onde océanique, nous nous limitons à un modèle de guide à l'ordre 0, c'est-à-dire un guide présentant une condition de type Neumann au fond et une condition de type Dirichlet à la surface. Lorsque l'on utilise la méthode des images en considérant une seule interface infiniment molle, un raisonnement similaire au raisonnement précédent nous montre que l'on doit donner un signe opposé à la source réelle et à son image. On a donc :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR_{01}}}{R_{01}} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR_{02}}}{R_{02}} + \dots, \quad (2.16)$$

La suite du calcul est la même en effectuant ce changement de signe au moment du calcul des Fonction de Green des cibles 3 et 4 sur la figure 2.1. Les positions des cibles virtuelles ne change pas, seul le signe devant chaque fonction de Green change.

On obtient donc :

¹ Le fonctionnement d'un kaléidoscope est basé sur le même principe, c'est pourquoi on parle d'effet « kaléidoscope » pour caractériser cet effet d'agrandissement de la lentille

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{ikR_{n1}}}{R_{n1}} + \frac{e^{ikR_{n2}}}{R_{n2}} - \frac{e^{ikR_{n3}}}{R_{n3}} - \frac{e^{ikR_{n4}}}{R_{n4}} \right], \quad (2.17)$$

où

$$\begin{aligned} R_{n1} &= \sqrt{r^2 + (z - z_0 - 2nh)^2}, \quad R_{n2} = \sqrt{r^2 + (z + z_0 - 2(n+1)h)^2}, \\ R_{n3} &= \sqrt{r^2 + (z + z_0 + 2nh)^2}, \quad R_{n4} = \sqrt{r^2 + (z - z_0 + 2(n+1)h)^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Comme nous l'avons vu cette méthode est assez simple à utiliser, cependant elle est limitée aux cas où $k(r)=k$ et on a des conditions de Dirichlet ou Neumann aux interfaces. De plus, elle devient rapidement compliquée à appliquer dans les cas où les interfaces ne sont pas parallèles. Dans ces cas particulier, il est plus judicieux d'utiliser la méthode que nous présentons dans le chapitre suivant : la méthode des modes normaux.

II.1.3. Méthode des modes normaux

Nous allons maintenant rappeler la méthode de décomposition en mode normaux. Cette méthode très puissante pour calculer les fonctions de Green dans de nombreuses configuration. Elle est particulièrement bien indiquée dans les problèmes en acoustique sous-marine où on a accès au champ acoustique à travers un réseau de capteurs (vertical ou horizontal). En effet, comme nous allons le voir les relations d'orthonormalisation des modes permettent de grandement simplifier les équations. La méthode DORT étant par essence une technique multi-élément, cette représentation sera souvent utilisée dans les chapitres suivants.

Ainsi on considère une source ponctuelle de coordonnées cylindriques $\mathbf{r}_0=(0,0,z_0)$ dans un milieu fluide stratifié horizontalement de densité $\rho(z)$ et une vitesse du son $c(z)$ (voir figure 2.2).

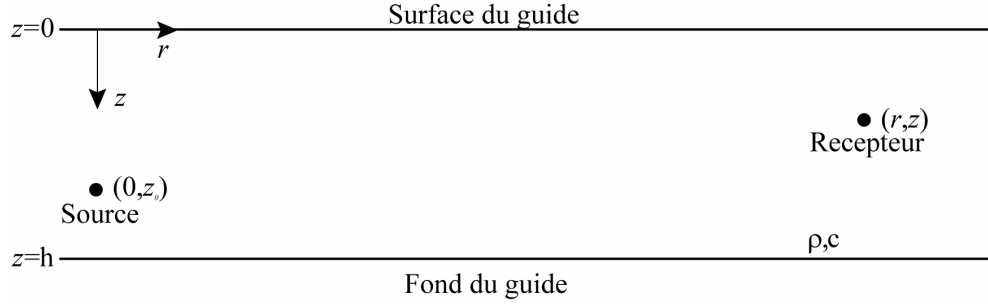


Fig.2.2 Géométrie et notation utilisées pour le calcul de la décomposition en modes normaux.

Alors l'équation des ondes inhomogène indépendante du temps est^[23] :

$$\rho(z)\nabla\cdot\left[\frac{1}{\rho(z)}\nabla p(\mathbf{r})\right]+k^2(z)p(\mathbf{r})=\frac{\delta(r)}{r}\delta(\theta)\delta(z-z_0), \quad (2.19)$$

où $\mathbf{r}=(r, \theta, z)$ et le nombre d'onde $k(z)=\omega/c(z)$. L'Eq.(2.19) se réécrit :

$$\nabla^2 p(\mathbf{r})+\rho(z)\nabla\left[\frac{1}{\rho(z)}\right]\cdot\nabla p(\mathbf{r})+k^2(z)p(\mathbf{r})=\frac{\delta(r)}{r}\delta(\theta)\delta(z-z_0), \quad (2.20)$$

avec

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z, \\ \nabla^2 &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

et $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta$ et \mathbf{u}_z sont les vecteurs unités dans les directions r, θ et z respectivement.

Le système étant à symétrie cylindrique et donc la dérivée selon θ s'annule et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial p(r,z)}{\partial r}\right] + \frac{\partial^2 p(r,z)}{\partial z^2} + \rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\rho(z)}\right]\frac{\partial p(r,z)}{\partial z} + \\ k^2(z)p(r,z) = \frac{\delta(r)}{r}\delta(\theta)\delta(z-z_0) \end{aligned} \quad (2.22)$$

En intégrant en θ de 0 à 2π , on trouve:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial p(r, z)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 p(r, z)}{\partial z^2} + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho(z)} \right] \frac{\partial p(r, z)}{\partial z} + k^2(z) p(r, z) = \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z - z_0) \quad (2.23)$$

La méthode des modes normaux consiste ensuite à séparer les variables r et z en introduisant les fonctions propres $\Phi_m(r)$ et $\Psi_m(z)$ d'amplitude $a_m(z_0)$ tel que

$$p(r, z) = \sum_m a_m(z_0) \Phi_m(r) \Psi_m(z) \quad (2.24)$$

où on suppose que $\Psi_m(z)$ est solution de l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\frac{1}{\rho(z)} \frac{d^2 \Psi_m(z)}{dz^2} + \frac{d}{dz} \frac{1}{\rho(z)} \frac{d \Psi_m(z)}{dz} + \frac{k_{zm}^2}{\rho(z)} \Psi_m(z) = 0 \quad (2.25)$$

avec $k_{zm}^2 = k^2(z) - k_{rm}^2$, et k_{rm} et k_{zm} sont les nombres d'ondes horizontaux et verticaux respectivement associés à la fonction d'onde $\Psi_m(z)$.

La solution complète de l'Eq.(2.19) est donc :

$$p(r, z) = \frac{i}{4\rho(z_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m^*(z_0) \Psi_m(z) H_0^{(1)}(k_{rm} r) \quad (2.26)$$

En champ lointain ($k_{rm} r > 4$)^[10], on peut remplacer la fonction de Hankel par sa forme asymptotique

$$H_m^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (2.27)$$

$$p(r, z) \sim \frac{ie^{-i\pi/4}}{\rho(z_0)\sqrt{8\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m^*(z_0) \Psi_m(z) \frac{e^{ik_{rm}r}}{\sqrt{k_{rm}r}}$$

1.3.1. Guide d'onde fluide homogène avec surface libre et fond dur

Appliquons le calcul des modes normaux sur un modèle océanique à l'ordre zéro, c'est-à-dire, une couche de fluide homogène avec une condition de pression s'annulant à la surface et un fond infiniment dur.

La condition de densité homogène nous permet de mettre l'Eq.(2.25) sous la forme :

$$\frac{d^2 \Psi_m(z)}{dz^2} + k_{zm}^2 \Psi_m(z) = 0 \quad (2.28)$$

avec pour conditions aux limites :

$$\begin{aligned} p &= 0 \text{ en } z = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \text{ en } z = h \end{aligned}$$

et qui a pour solution en prenant en compte la normalisation de Ψ_m :

$$\Psi_m(z) = \sqrt{\frac{2\rho}{h}} \sin(k_{zm}z), \quad k_{zm} = \frac{(m+1/2)\pi}{h}, \quad m \in \mathbb{N} \quad (2.29)$$

La somme des modes normaux s'écrit donc :

$$p(r, z) = \frac{i}{2h} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(k_{zm}z_0) \sin(k_{zm}z) H_0^{(1)}(k_m r) \quad (2.30)$$

Elle a le comportement asymptotique suivant:

$$\begin{aligned} H_m^{(1)}(x) &\approx i^{-m} \sqrt{\frac{2}{i\pi x}} e^{ix}, \quad x \gg m \\ p(r, z) &\sim \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi h}} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(k_{zm}z_0) \sin(k_{zm}z) \frac{e^{ik_{rm}r}}{\sqrt{k_{rm}r}} \\ &\sim \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi h}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(k_{zm}z_0)}{\sqrt{k_{rm}r}} \left[e^{i(k_{zm}z + k_{rm}r)} - e^{-i(k_{zm}z - k_{rm}r)} \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

où les termes entre crochets peuvent être interprétés comme étant respectivement une onde plane descendante et onde plane ascendante possédant un angle d'inclinaison θ_m par rapport à l'axe vertical qui vérifie $k_{rm} = k_0 \sin(\theta_m)$ et $k_{zm} = k_0 \cos(\theta_m)$ (cf figure 2.3)

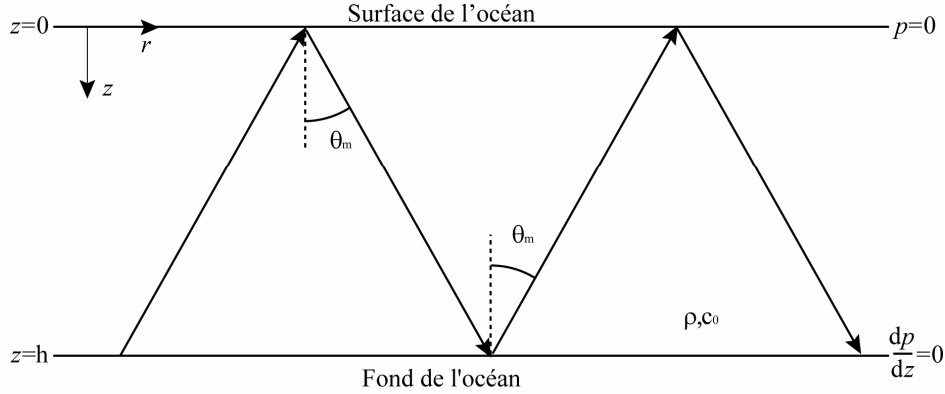


Fig.2.3 Représentation schématique de l'angle θ_m du nombre d'onde k_0 .

Au fur et à mesure que m augmente, l'angle d'inclinaison décroît. Ainsi, les modes correspondent à des directions spécifiques de propagation qui sont privilégiées par l'interférence constructive d'une onde plane ascendante et d'une onde plane descendante, donnant naissance à une onde stationnaire en profondeur.

De plus, comme le montre la figure 2.4, le m ème mode possède m nœuds (à l'exclusion de celui à la surface) qui sont placés à $z = \frac{nh}{(m + \frac{1}{2})}$, avec $n=1,2,..m$.

D'après l'Eq.(2.31), il est clair que si la source ou le récepteur est placé à un de ces nœuds, la contribution de ce mode particulier s'annule. Par contre, en $z=h$ par construction, aucun mode ne s'annule. C'est pourquoi en général dans les expériences destinées à extraire les modes d'un guide d'onde à l'aide d'un récepteur immobile et d'une source s'éloignant du récepteur (pour tracer la courbe de dispersion du guide par exemple), les deux éléments sont placés au fond du guide afin d'avoir la contribution de tous les modes.

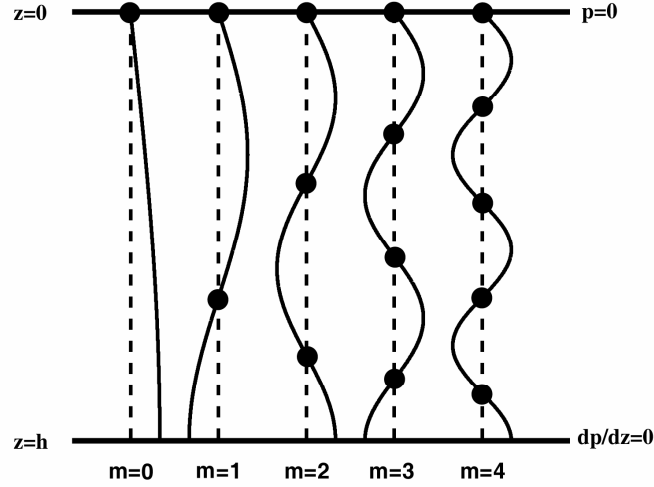


Fig.2.4 Représentation des 5 premiers modes et de la position des nœuds pour un guide ayant une surface infiniment molle (condition de Dirichlet) et un fond infiniment dur (condition de Neumann).

Chaque mode du guide se propage dans la direction radiale avec une vitesse de phase c_m correspondant à la vitesse à laquelle se déplacent les surfaces isophases :

$$\begin{aligned}
 c_m &= \frac{\omega}{k_m} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_{zm}^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - [(m+1/2)\pi/h]^2}} \\
 &= \frac{c_0}{\sqrt{1 - [(m+1/2)\lambda/2h]^2}}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

On peut noter que la vitesse de phase modale est fonction de la longueur d'onde (ou de la fréquence), ce phénomène est appelé dispersion géométrique car cette dépendance fréquentielle n'est due qu'à la présence du guide et non pas aux propriétés intrinsèques du matériau composant le guide (dispersion intrinsèque).

L'examen du dénominateur de l'Eq.(2.32) permet de séparer les modes en trois groupes :

$(m+1/2)\lambda/2h < 1$: ce groupe est composé des modes dont la vitesse de phase est supérieure à c_0 ;

$(m+1/2)\lambda/2h = 1$: dans ce cas, k_{rm} est nul et la vitesse c_m est infinie, les modes sont stationnaires en profondeur sans propagation dans la direction du guide ;

$(m+1/2)\lambda/2h > 1$: k_{rm} et c_m sont tous les deux imaginaires purs et les modes décroissent exponentiellement avec la distance (modes évanescents)(voir figure 2.5).

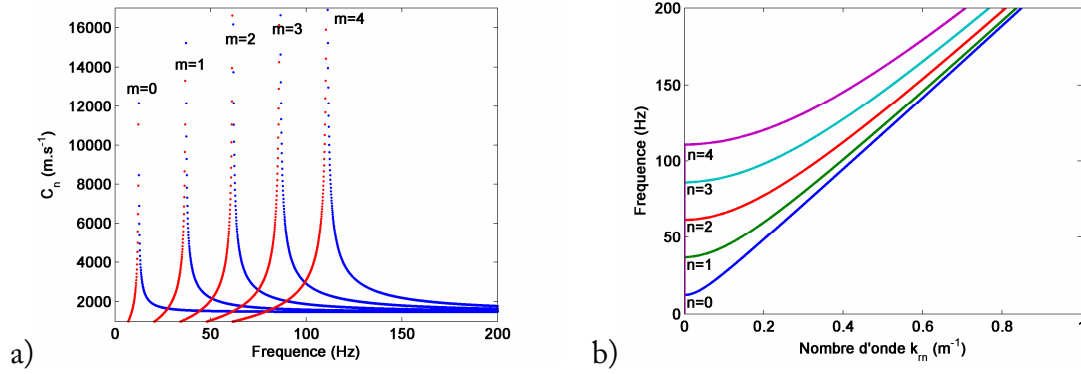


Fig.2.5 Exemple de a) vitesses de phase et de b) nombre d'onde k_{rm} pour les 5 premiers modes d'un guide d'onde océanique parfait de profondeur $h=30$ m et $c_0=1477$ m.s^{-1} , dans la bande de fréquence allant de 0 à 200 Hz. En a), une courbe bleu indique que la vitesse de phase est réelle alors qu'une courbe rouge indique que la vitesse est imaginaire.

En pratique, pour les guides longs, on obtient une bonne approximation du champ total en ne considérant que les modes se propageant, c'est-à-dire en considérant que la somme sur m s'arrête au terme $M_{max} = \frac{2h}{\lambda} - \frac{1}{2}$.

De plus, la définition du premier groupe nous permet d'introduire la fréquence de coupure basse qui est la fréquence en dessous de laquelle le mode m ne se propage plus. Elle est donnée par la formule :

$$\omega_m^c = k_{zm} c_0 = \frac{(m+1/2)\pi c_0}{h} \quad (2.33)$$

Ici la vitesse du son dans le fond est infinie. Ceci implique qu'il n'y a pas de fréquence de coupure haute mais nous verrons dans la suite que ce n'est pas toujours le cas.

On définit la vitesse de groupe comme la mesure de la vitesse de l'énergie dans un système d'onde dispersif. Pour le champ acoustique associé au mode m , la vitesse de groupe V_m est définie par la formule :

$$V_m = \frac{d\omega}{dk_{rm}} = \frac{d(c_m k_{rm})}{dk_{rm}} = c_m - k_{rm} \frac{dc_m}{dk_{rm}} \quad (2.34)$$

où $V_m < c_0$ de par le principe de causalité.

Grâce à la formule $k_{rm} = \sqrt{k^2 - k_{zm}^2} = \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_m^{c^2}}$, on trouve

$$\begin{aligned} c_0^2 k_{rm}^2 &= \omega^2 - \omega_m^{c^2} \\ c_0^2 k_{rm} dk_{rm} &= \omega d\omega \\ \frac{d\omega}{dk_{rm}} &= c_0^2 \frac{k_{rm}}{\omega} \end{aligned} \quad (2.35)$$

soit

$$V_m = c_0 \sqrt{1 - (\omega_m^c / \omega)^2} \quad (2.36)$$

Ce qui indique que V_m tend vers 0 quand la fréquence se rapproche de la fréquence de coupure et V_m tend vers c_0 quand la fréquence tend vers l'infini comme on peut le voir sur la figure 2.6.

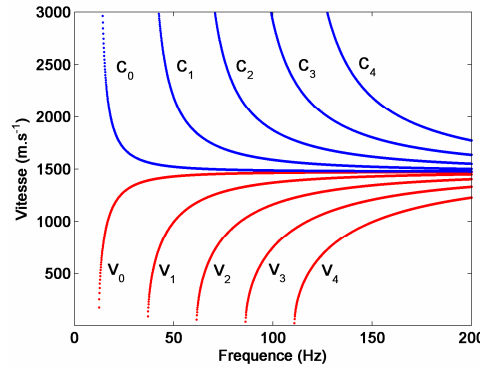


Fig.2.6 Vitesse de groupe et vitesse de phase pour les 5 premiers modes d'un guide d'onde océanique parfait dont la profondeur est de $h=30$ m et $c_0=1477$ m.s⁻¹

1.3.2. Guide d'onde de Pekeris

Nous nous attardons maintenant sur le cas particulier où la vitesse du son dans le demi espace infini constituant le fond du guide est supérieure à la vitesse du son dans le guide ($c_1 > c_0$). Lorsque cette condition est cumulée avec $\rho_1 > \rho_0$ et une condition de Dirichlet à la surface, on a affaire à un guide d'onde de Pekeris^[11](cf figure 2.7). Ce modèle plutôt simple de guide est très intéressant à étudier en acoustique sous-marine car il permet de comprendre de nombreux phénomènes se déroulant pendant la propagation d'une onde dans chenal peu profond.

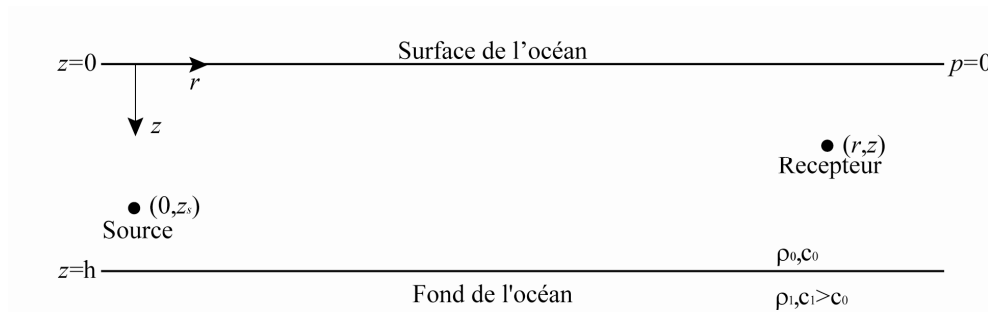


Fig.2.7 Géométrie et propriétés du modèle de guide d'onde de Pekeris.

Comme expliqué dans la section précédente pour une réflexion sur un milieu possédant une célérité et une densité supérieure à celle de l'eau, il existe un angle critique

θ_c qui délimite deux régions distinctes dans lesquelles le coefficient de réflexion a des valeurs particulières.

Pour des angles d'incidences $\theta > \theta_c$, le coefficient de réflexion est imaginaire pur avec un module égal à 1, alors que pour des angles d'incidence $\theta < \theta_c$, le coefficient de réflexion est réel pur de module inférieur à 1. On a donc réflexion totale avec déphasage dans le premier cas et atténuation sans déphasage dans le deuxième.

Pour $\theta > \theta_c$, on a :

$$e^{2i(k_{zn}h - \pi/2 + \varphi/2)} = 1 \quad (2.37)$$

où φ est la phase de R_B :

$$\varphi = -2 \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{\sin^2 \theta - c_0^2 / c_1^2}}{m \cos \theta} \right] \quad (2.38)$$

avec $m = \rho_1 / \rho_0$. L' Eq.(2.37) implique que :

$$2(k_{zn}h - \pi/2 + \varphi/2) = 2n\pi, \text{ avec } n = 0, 1, 2, \dots,$$

et donc

$$k_{zn}h = (n + 1/2)\pi - \varphi/2, \text{ avec } n = 0, 1, 2, \dots,$$

La méthode de décomposition en modes normaux va nous être d'une grande utilité dans les chapitres suivants, notamment de nombreux calculs utilisant la formulation matricielle vont pouvoir être simplifiés grâce aux propriétés d'orthonormalisation de ces modes. Nous allons maintenant présenter la formulation matricielle du Retournement Temporel qui est à l'origine de la méthode DORT.

II.2. Le principe du Retournement Temporel en mode échographique

Le formalisme matriciel utilisé pour décrire le processus de Retournement Temporel est largement exposé dans différents articles^[7,13] et thèses^[14,15]. Peu utilisé par les acousticiens au début des années 90, il semble aujourd'hui naturel et incontournable. Il sera abondamment utilisé dans ce manuscrit, il est donc important de rappeler les notions qui vont suivre.

II.2.1. La matrice de transfert \mathbf{K}

La matrice de transfert \mathbf{K} est définie de la manière suivante : le transducteur i émet une impulsion temporelle brève assimilée à un Dirac $\delta(t)$, le signal diffusé par le système est enregistré par le transducteur j . Le terme $k_{ji}(t)$ est appelé réponse impulsionnelle inter-élément du système. Un schéma décrivant l'acquisition de cette réponse impulsionnelle est présentée sur la figure 2.4. Sous réserve que les phénomènes physiques ayant lieu soient linéaires, le système comprenant le milieu diffusant, la barrette émettrice et la barrette réceptrice (elles peuvent être confondues) est totalement décrit par l'ensemble des réponses impulsionnelles inter-élément. En effet, pour un signal émis sur l'émetteur i , noté $e_i(t)$, le signal reçu sur le récepteur j , noté $r_j(t)$, est le produit de convolution entre la réponse impulsionnelle et $e_i(t)$.

Cette relation s'écrit :

$$r_j(t) = k_{ji}(t) \otimes e_i(t) \quad (2.39)$$

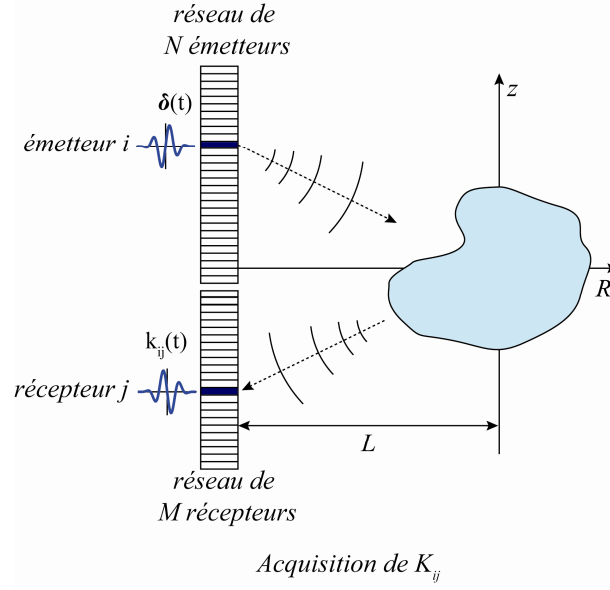


Fig.2.8 Acquisition de la réponse impulsionnelle inter-élément.

La transformée de Fourier de cette relation s'écrit pour un couple (i,j) à la pulsation ω :

$$R_j(\omega) = K_{ij}(\omega)E_i(\omega) \quad (2.40)$$

On peut synthétiser l'équation précédente pour tous les couples (i,j) en utilisant l'écriture matricielle suivante:

$$\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{K}(\omega)\mathbf{E}(\omega) \quad (2.41)$$

La matrice $\mathbf{K}(\omega)$ est appelée selon les auteurs matrice de transfert ou matrice des réponses inter-élément, en anglais, « array response matrix » selon Papanicolaou^[16] ou « multistatic data matrix » selon Devaney^[17]. Dans la suite, lorsque la dépendance fréquentielle est évidente, nous omettons celle-ci dans l'écriture des équations pour plus de lisibilité.

Remarque : Lorsque $N=M$, du fait de la réciprocité, $k_{ij}(t)$ est égal à $k_{ji}(t)$, ce qui implique que la matrice \mathbf{K} est symétrique. De plus, \mathbf{K} est sans dimension.

II.2.2. L'opérateur de Retournement Temporel

Lorsque les deux réseaux sont à la fois émetteurs et récepteurs et que l'on dispose d'une électronique adéquate, on peut effectuer une séquence de retournement temporel itératif. Lors d'une séquence de retournement temporel itératif ayant pour première émission \mathbf{E}_0 , le vecteur émis après $2n$ opérations de retournement temporel s'écrit :

$$\mathbf{E}_{2n} = (\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K})^n \mathbf{E}_0 \quad (2.42)$$

où le symbole † (appelé dague) dénote la transposée hermitienne.

En effet, si on formalise une itération du processus de Retournement Temporel, on peut décrire les différentes opérations de la manière suivante :

Pour une émission initiale \mathbf{E}_0 de taille N , le vecteur réception de taille M correspondant \mathbf{R}_0 s'écrit $\mathbf{K}\mathbf{E}_0$. Pour une pulsation ω , l'opération de Retournement Temporel correspond à une conjugaison de phase. L'émission \mathbf{E}_1 émise par les transducteurs jouant le rôle de récepteurs dans la phase initiale est donc $\mathbf{K}^*\mathbf{E}_0^*$ et le signal traversant le système dans le sens opposé est cette fois-ci multiplié par ${}^t\mathbf{K}$. On peut donc écrire le signal reçu par la barrette de taille N comme étant $\mathbf{R}_1 = \mathbf{K}'\mathbf{K}^*\mathbf{E}_0^*$ et le signal réémis comme étant $\mathbf{E}_2 = (\mathbf{K}'\mathbf{K}^*\mathbf{E}_0^*)^* = \mathbf{K}^\dagger\mathbf{K}\mathbf{E}_0$. Cette séquence est représentée sur la figure 2.9.

La matrice $\mathbf{K}^\dagger\mathbf{K}$ qui apparaît ainsi est l'Opérateur de Retournement Temporel (ORT).

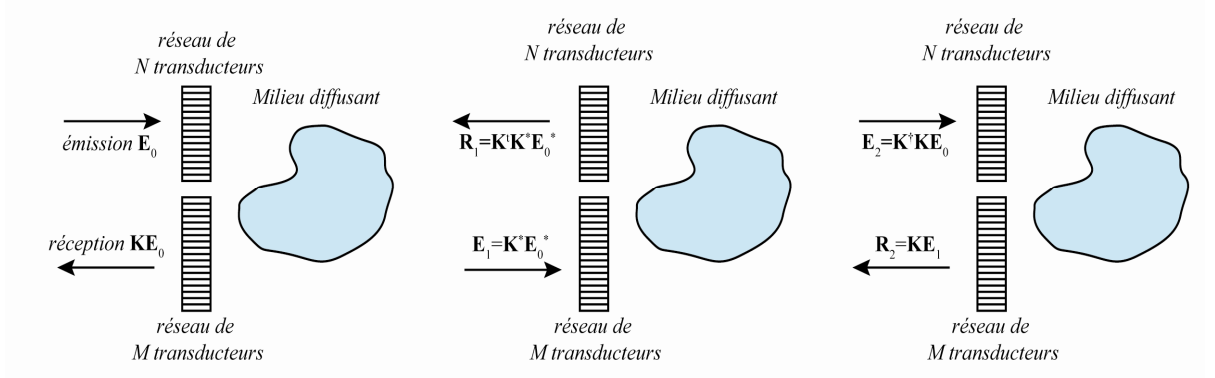


Fig.2.9 Séquence d'itération du Retournement Temporel

Quand le même réseau de transducteurs est utilisé pour l'émission et la réception, la matrice \mathbf{K} est carrée et le principe de réciprocité assure qu'elle est symétrique, l'opérateur $\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K}$ se réduit alors à $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$.

Dans tous les cas, l'opérateur de retournement temporel est diagonalisable dans une base orthogonale et un vecteur propre de $\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K}$ peut être considéré comme un invariant du processus RT.

Lorsque les réseaux sont soit émetteurs soit récepteurs, l'expérience de retournement temporel peut être faite par la pensée, et les résultats énoncés ci-dessous conservent leur sens.

Le principal invariant de l'opérateur de retournement temporel est naturellement la limite d'un processus de retournement temporel itératif. En effet, lorsque l'on élève la matrice $\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K}$ à la puissance n , elle converge vers $\Lambda_1^n \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_1^*$ où Λ_1 est la plus grande valeur propre et \mathbf{V}_1 le vecteur propre associé. Une itération du processus ayant pour première émission \mathbf{E}_0 converge donc vers

$$\mathbf{E}_{2n} \approx \Lambda_1^n \langle \mathbf{E}_0, \mathbf{V}_1 \rangle \mathbf{V}_1 \quad (2.43)$$

Par conséquent, à chaque fréquence, si la première émission n'est pas orthogonale à $\mathbf{V}_1(\omega)$, le processus converge vers le vecteur $\mathbf{V}_1(\omega)$ à un coefficient multiplicateur près.

En toute rigueur, le processus itératif converge vers un signal monochromatique de fréquence ω_0 pour laquelle $\Lambda_1(\omega_0)$ est maximale. Ce formalisme ne tient pas compte de

la sélection d'une fenêtre temporelle de durée finie à chaque itération, toutefois, il est suffisant pour donner une bonne appréciation de la convergence du processus.

Lorsqu'un milieu contient plusieurs diffuseurs résolus, l'itération du processus de retournement temporel sélectionne naturellement le front d'onde convergent vers le diffuseur le plus réfléchissant^[12]. Ce front d'onde est un « invariant » de l'opération de retournement temporel. C'est ainsi que l'on peut espérer sélectionner l'écho d'un défaut noyé dans un bruit de structure^[18] ou bien sélectionner le point le plus brillant d'un calcul rénal^[19].

La méthode DORT consiste à extraire tous les vecteurs propres de l'ORT en diagonalisant la matrice $\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K}$. Ainsi en exploitant l'ensemble des vecteurs propres de la matrice de transfert et non pas seulement le vecteur propre correspondant au diffuseur le plus réfléchissant, la méthode DORT permet de détecter le nombre de cibles ainsi que de sélectionner le front d'onde convergent vers n'importe laquelle des cibles.

La diagonalisation de l'ORT s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^\dagger \quad (2.44)$$

avec $\mathbf{\Lambda}$ une matrice de taille $N \times N$ diagonale par définition et dont chaque élément Λ_i non-nul est associé à une cible ponctuelle isotrope. Les vecteurs colonne correspondants de \mathbf{V} quand à eux donnent la loi de retard monochromatique pour focaliser sur la cible associée.

Par exemple, pour 2 cibles ponctuelles la diagonalisation de $\mathbf{K}^\dagger(\omega) \mathbf{K}(\omega)$ s'écrit explicitement de la manière suivante :

$$\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{21} & \vdots & \vdots \\ V_{12} & V_{22} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{1n} & V_{2n} & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & & 0 \\ & \Lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11}^* & V_{12}^* & \cdots & V_{1n}^* \\ V_{21}^* & V_{22}^* & \cdots & V_{2n}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

L'ORT est de rang 2 donc seules deux valeurs propres sont non-nulles.

Afin de calculer les invariants de l'ORT plus rapidement, on peut remarquer que la diagonalisation de l'ORT est équivalente à la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice des réponses inter-éléments \mathbf{K} . La SVD de \mathbf{K} s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\dagger \quad (2.46)$$

Les matrices \mathbf{U} et \mathbf{V} possédant la propriété $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{Id}$ et $\mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger = \mathbf{Id}$, il apparaît immédiatement que les vecteurs colonne \mathbf{V}_i sont les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{K}^\dagger\mathbf{K}$ correspondant à l'émission et les vecteurs colonne \mathbf{U}_i sont les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{K}\mathbf{K}^\dagger$ correspondant à la réception. On en déduit aussi que $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Sigma}^2$. Les valeurs propres de l'ORT sont donc les carrés des valeurs singulières de la matrice de transfert \mathbf{K} .

L'exemple suivant illustre de manière simple les avantages apportés par cette méthode. Il montre aussi les problèmes que nous avons du résoudre pour tirer pleinement parti de la méthode (et les problèmes qu'il reste encore à résoudre).

Deux fils de réflectivités différentes sont placés à 5 mm l'un de l'autre et à 12.5 cm d'une barrette échographique ayant pour fréquence centrale 3,5 MHz. Les transducteurs de la barrette jouent à la fois le rôle d'émetteurs et de récepteurs, on effectue donc l'acquisition de la matrice de transfert de la même façon que décrit sur la figure 2.8 avec $M=N$ et les deux réseaux confondus. Le Bscan correspondant à l'émission n°32 est présenté sur la figure 2.10.

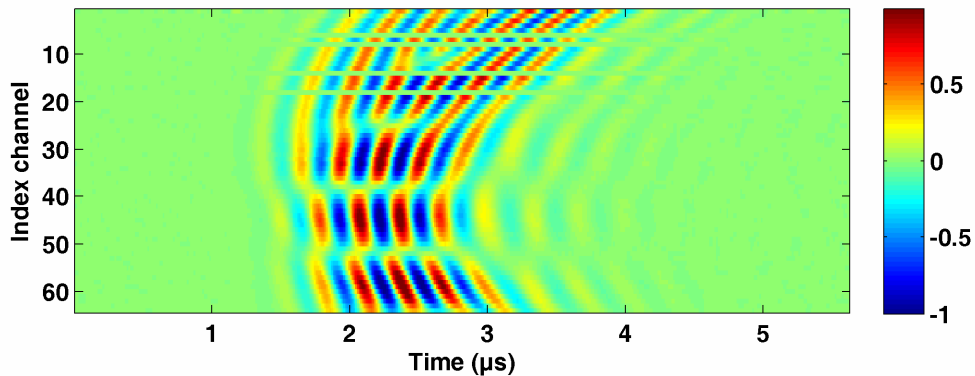


Fig.2.10 Echo après émission par la voie 32 pour 2 fils d'élastane placés à 12,5 cm du réseau et espacés de 5 mm.

Comme on peut le constater, les deux fils étant à la même distance, il n'est pas possible de les séparer simplement par leur différence de temps de vol. Le signal provenant du premier fil interfère avec le signal du second fil sur la moitié des voies. La SVD de \mathbf{K} est réalisée à chaque fréquence comprise entre 2 et 5 MHz et les valeurs singulières sont tracées sur la figure 2.11.

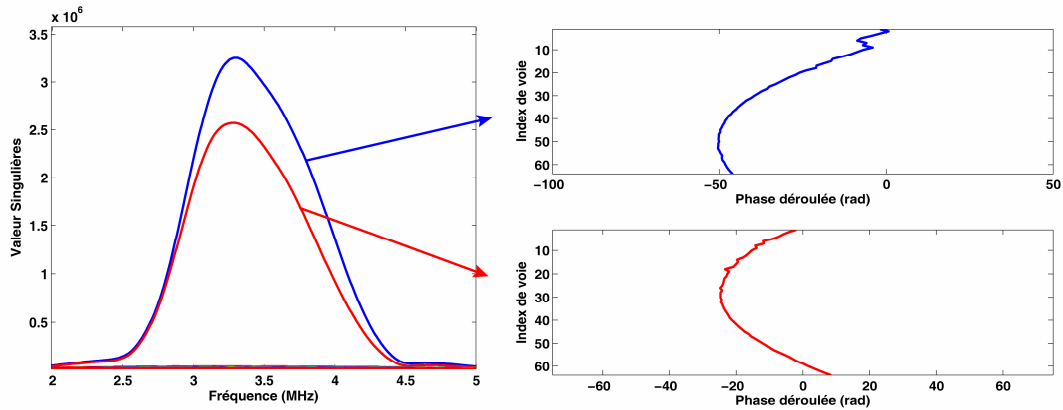


Fig.2.11 Valeurs singulières tracées en fonction de la fréquence pour 2 fils d'élastane placés à 12,5cm du réseau et espacés de 5 mm et phase déroulée du vecteur propre associé pour la fréquence $f=4,2$ MHz

Comme prévu par la théorie, on a bien pour chaque fréquence deux valeurs singulières non nulles associées chacune à une cible. De plus, on obtient une série de vecteurs propres monochromatiques correspondant à chaque fréquence à la loi de phase focalisant sur la cible associée. Les valeurs singulières sont bien distinctes sur la bande de fréquence qui va de 2,8 MHz à 4,5 MHz cependant dans le reste de la bande de fréquence, leur niveau est trop proche pour pouvoir associer sans ambiguïté une valeur singulière à une cible. Si un croisement de valeur singulières a eu lieu à $\sim 4,6$ MHz alors la première VS dans la bande 2,5-4,6 MHz ne sera pas associée à la même cible que dans la bande 4,6-5 MHz.

Les séries de vecteurs propres associés aux deux premières VS dans la bande de fréquence vont nous permettre de localiser la cible grâce à leur repropagation dans un modèle numérique.

II.2.3. Repropagation des vecteurs propres monochromatiques

La méthode la plus simple pour repropager les vecteurs propres issus de la méthode DORT est d'utiliser un modèle acoustique en eau libre. Ce modèle simplifié fait l'hypothèse que la célérité dans le milieu étudié est constante et donc que la fonction de Green allant d'un point à un autre du milieu est simplement décrite par une loi cylindrique (à 2 dimensions) :

$$G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\sqrt{R^2+(z_0-z)^2}}}{\sqrt{R^2+(z_0-z)^2}} \quad (2.47)$$

La figure 2.12 montre la repropagation fréquence par fréquence des vecteurs propres associés aux deux premières valeurs singulières présentées sur la figure 2.11. La largeur de tache focale théorique à mi-hauteur est de $\lambda R / D \simeq 2$ mm. Les deux fils étant espacés de 5 mm, cette méthode permet d'associer, à chaque fréquence, une valeur singulière à une cible lorsque les deux valeurs sont bien espacées. En effet, lorsque ce n'est pas le cas comme dans la bande allant de 2 MHz à 2,8 MHz, les figures 2.12a et 12c montrent qu'il y a « couplage² » entre les vecteurs propres. Dans cette bande de fréquence, les deux fils ont la même réflectivité apparente.

² Ce terme est un abus de langage étant donné le fait que les vecteurs propres sont orthogonaux par construction. Cependant on l'utilise souvent pour exprimer le fait que la loi qui attribue une valeur propre à une cible n'est plus valable.

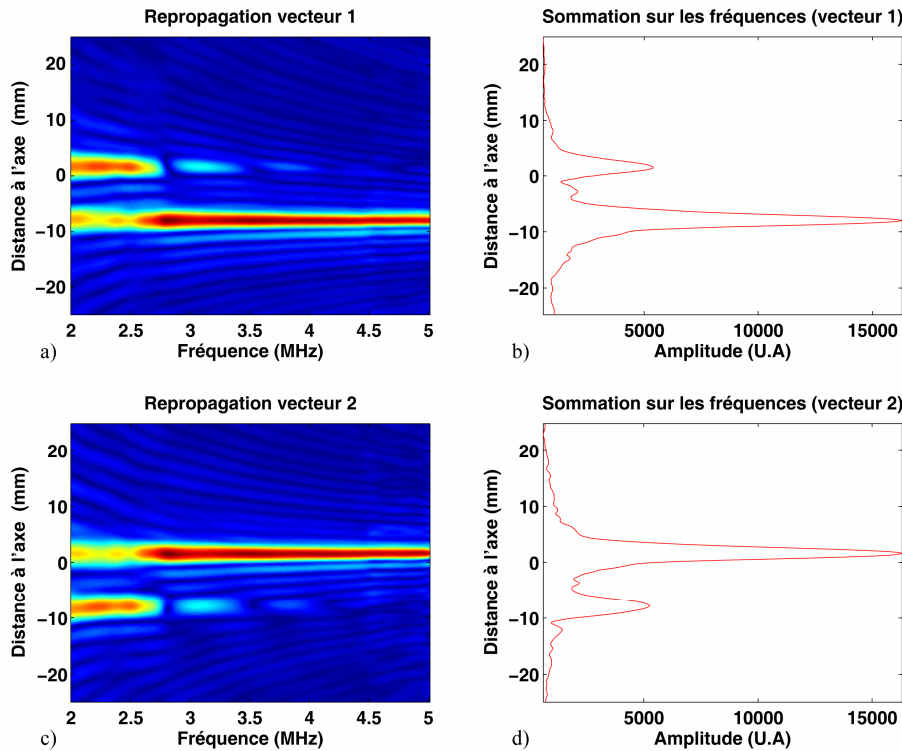


Fig.2.12 Repropagation des deux premiers vecteurs propres à la distance de 125 dans un modèle de simulation en eau libre. Les figures a) et c) montrent l'amplitude du champ acoustique en fonction de la hauteur dans l'eau et de la fréquence. Les figures b) et d) montrent la somme sur toutes les fréquences du carré du champ acoustique en fonction de la hauteur.

Cette méthode de repropagation est d'un grand intérêt dans le cas d'une détection en guide d'onde lorsque la géométrie du guide est compliquée ou inconnue. Elle a déjà été utilisée dans ces conditions dans Roux *et al.* et elle permet d'illustrer le concept d'images virtuelles prédit par la méthode des images présentée dans la section II.1.2.

A titre d'exemple, la figure 2.13 montre le dispositif expérimental suivant : deux fils de réflectivités différentes sont placées cette fois-ci dans un guide d'onde de 30 mm de profondeur. La distance entre le réseau de transducteur et les fils est de 400 mm. Les deux fils sont distants de 3 mm. Les transducteurs fonctionnent à une fréquence centrale de 3,5 MHz et le fond du guide est constitué d'une plaque de plexiglas. Les valeurs singulières issues de la méthode DORT sont présentées sur la figure 2.14.

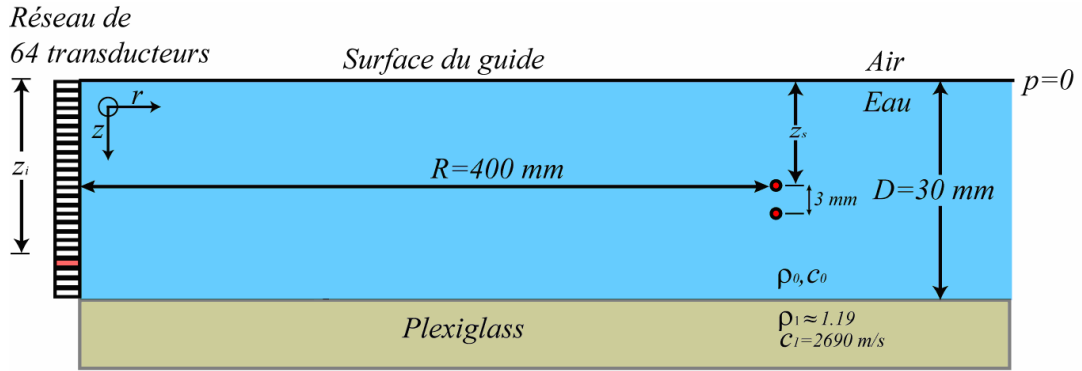


Fig.2.13 Paramètres et géométrie de l'expérience. Les deux cibles sont des fils l'un en nylon de diamètre 0.2 mm, l'autre en alumel de 0.1 mm. Les deux fils sont assimilés à des cibles ponctuelles et isotropes du fait de leur petite taille devant la longueur d'onde.

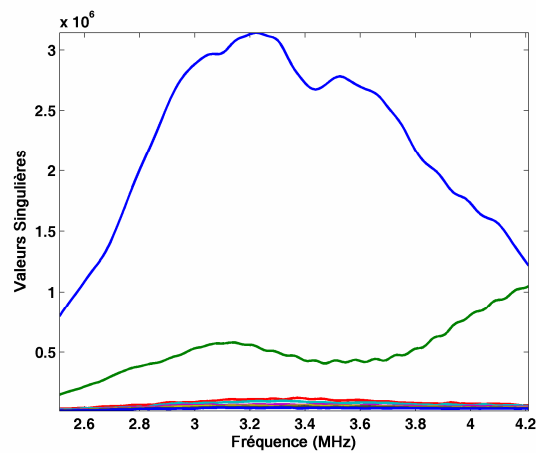


Fig.2.14 Valeurs Singulières tracées en fonction de la fréquence. Comme dans la configuration précédente en eau libre, les deux VS sont bien distinctes dans la bande de fréquence étudiée. On remarque que le fil de nylon qui est, selon la littérature, le fil le moins échogène donc associé à la deuxième VS, possède une résonance vers 4,3 MHz où il peut y avoir croisement dans l'ordre des réflectivités des fils.

Grâce à la nature différente des fils et à leur diamètre différent, les niveaux des VS sont particulièrement bien espacés. La figure 2.15 montre la repropagation des vecteurs propres associés aux deux premières valeurs propres de la même façon que

précédemment. La tache focale en eau libre a une largeur à mi-hauteur théorique de $\lambda R / D \approx 6,4$ mm. La distance séparant les deux fils étant de 3 mm, cette méthode de repropagation ne permet pas d'associer sans équivoque une valeur propre à une cible pour une fréquence donnée.

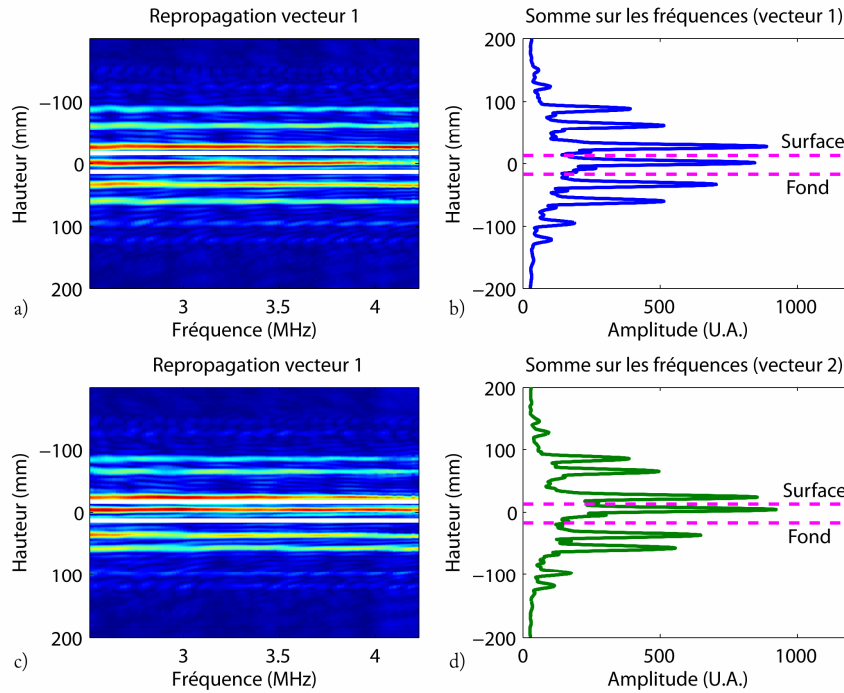


Fig.2.15 Repropagation des deux premiers vecteurs propres à la distance de 400 mm dans un modèle de simulation en espace libre. Les figures a) et c) montrent l'amplitude du champ acoustique en fonction de la hauteur dans l'eau et de la fréquence. Les figures b) et d), elles, montrent la somme sur toutes les fréquences du carré du champ acoustique en fonction de la hauteur.

Comme prévu par la théorie des images, la fonction de Green d'un point d'un guide est égale à la somme de plusieurs fonctions de Green en eau libre (en théorie une infinité dans un guide d'onde parfait) correspondant aux images virtuelles de ce point. La repropagation d'un vecteur propre associé à une cible ponctuelle dans un guide dans un modèle « eau libre » donne donc lieu à l'apparition d'une tache de focalisation correspondant au chemin direct qui sera localisé à la position de la cible ainsi qu'à plusieurs autres taches de focalisation qui correspondent aux chemins réfléchis sur les

parois du guide comme le montre la figure 2.15. La représentation utilisée pour tracer les figures 2.15b et 2.15d est utile pour connaître dans une certaine limite imposée par le critère de Rayleigh la position relative de la cible par rapport au réseau ainsi que celle de ses images virtuelles (le zéro représente le centre du réseau). Elle permet aussi de connaître le nombre de réflexions pris en compte dans le calcul DORT. Par exemple, ici, on observe l'image du trajet direct ainsi que 8 réflexions sachant que les réflexions n°7 et n°8 auront un niveau très faible du au fait que l'absorption dans le plexiglas est non négligeable pour les angles considérés. Grâce à la connaissance des positions des images virtuelles, on peut aussi avoir une estimation de la hauteur du guide. Cette repropagation en eau libre n'est intéressante que pour une hauteur d'eau D supérieure à $\lambda R / d$ où d est l'ouverture du réseau.

Pour modéliser un guide d'onde, nous pouvons utiliser des codes numériques avancés tel que le code R.A.M. (pour Range-dependant Acoustic Model) qui est basé sur l'approximation de l'équation parabolique (PE)^[20], un code basé sur les modes normaux tel que KRAKEN^[21] ou encore un code d'intégration du nombre d'onde tel que OASES.

Une revue complète des méthodes de simulation numérique de guide n'étant pas l'objectif de ce manuscrit, nous nous contenterons de présenter les caractéristiques du modèle R.A.M. que nous avons utilisé pour réaliser les repropagations numériques pendant cette thèse.

Cette méthode de simulation basée sur l'approximation de l'Equation Parabolique (PE) a été implémentée principalement par Collins *et al.* et est présentée de manière complète dans Jensen *et al.*^[22,23]. Cette approximation est basée sur l'équation d'Helmoltz homogène en coordonnées cylindriques et permet de simuler un guide d'onde à interfaces non parallèles en découpant le milieu en tranches successives invariantes selon la longueur. Dans chaque tranche, la pression à une fréquence est solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + k^2 p = 0 \quad (2.48)$$

avec ρ la densité, $k = (1 + i\eta\beta)\omega/c$, ω la pulsation, c la vitesse du son dans le milieu, β est l'atténuation en dB/ λ , $\eta = (40\pi \log_{10} e)^{-1}$.

En factorisant l'opérateur dans l'Eq.(2.48), on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + ik_0(1+X)^{1/2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik_0(1+X)^{1/2}\right)p = 0 \quad (2.49)$$

$$X = k_0^{-2} \left(\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \right) + k^2 - k_0^2 \right) \quad (2.50)$$

Soit la superposition d'une onde se propageant dans le sens des r positifs et d'une onde se propageant dans le sens des r négatifs. En supposant que cette dernière est négligeable, on peut simplifier l'équation de propagation en :

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + ik_0(1+X)^{1/2}\right)p = 0 \quad (2.51)$$

dont la solution peut s'écrire :

$$p(r + \Delta r, z) = \exp(ik_0\Delta r) \prod_{j=1}^n \frac{1 + \alpha_{j,n}X}{1 + \beta_{j,n}X} p(r, z) \quad (2.52)$$

Ainsi cette relation de récurrence permet de calculer le champ de pression sur toute la longueur du milieu à partir du champ initial appelé *starter* imposé en $r=0$. La figure 2.16 montre l'exemple de la repropagation à la fréquence $f=3.4$ MHz du premier vecteur propre d'une cible ponctuelle isotrope placée dans un guide de 40 mm de hauteur. Le coefficient n est ici pris égal à 10.

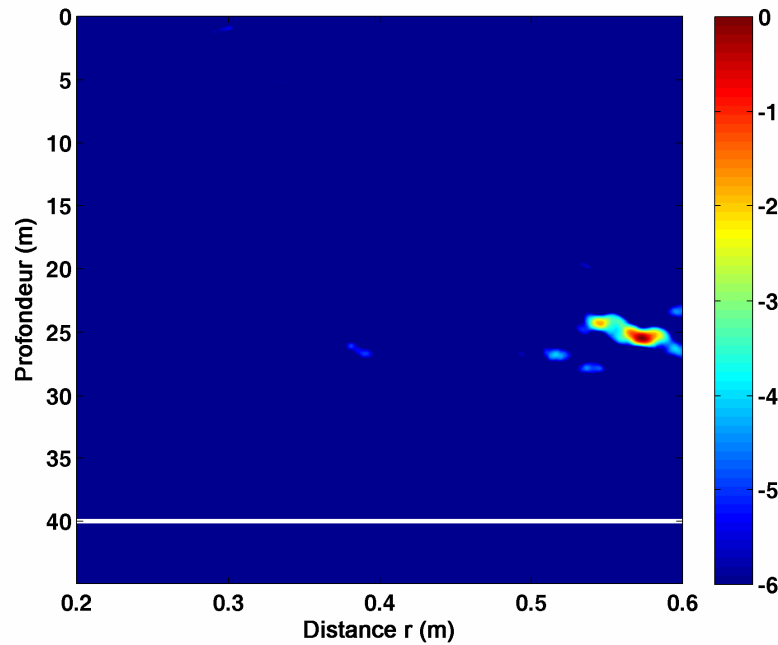


Fig.2.16 Repropagation du premier vecteur propre monochromatique d'une cible ponctuelle isotrope à la fréquence $f=3,4$ MHz dans le modèle R.A.M..

Dans le cadre de la méthode DORT, l'utilisation de modèles numériques permet de localiser plusieurs cibles dans un guide cependant ils nécessitent une connaissance extensive des paramètres du guide.

La plupart des modèles que nous avons présentés sont monochromatiques, il n'est donc pas nécessaire de revenir dans le domaine temporel. Cependant pour une utilisation de la méthode DORT en télécommunications ou dans n'importe quelle application où la réémission des vecteurs propres dans le milieu réel est requise, il faut impérativement reconstruire les « vecteurs propres temporels ». Cette reconstruction n'est pas triviale dans la grande majorité des cas en acoustique sous-marine comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

II.3. Reconstruction des vecteurs propres temporels en guide d'onde pour la télécommunication

Comme nous l'avons vu précédemment, la repropagation numérique des vecteurs propres issus de la méthode DORT peut très bien être réalisée dans le domaine fréquentiel. Par contre, si on veut réémettre ces signaux dans le milieu, il faut repasser dans le domaine temporel. Dans la suite, nous appelons « vecteur propres temporels », les invariants du processus de Retournement Temporel itératif obtenus en appliquant une transformée de Fourier inverse à une série de vecteurs singuliers monochromatiques de la matrice K .

II.3.1. Position du problème en guide d'onde

Nous nous concentrons uniquement sur le cas de cibles placées dans un guide d'onde. La réponse des cibles à un signal impulsionnel est alors un signal long dû à la dispersion des modes du guide. Le dispositif expérimental et les valeurs singulières correspondantes sont ceux présentés sur les figures 2.13 et 2.14.

On s'attend à ce que la reconstruction des vecteurs propres temporels soit directe par transformée de Fourier inverse. Cependant la figure 2.17 montre qu'une transformée de Fourier directe des vecteurs propres ne produit pas le signal attendu, c'est-à-dire la fonction de Green allant d'une des cibles au réseau. Les différentes fréquences du signal n'étant connues qu'au signe près, le résultat est un signal incohérent dont la focalisation à la position de la cible est assurée spatialement (comme le montre une repropagation dans un modèle monochromatique) mais n'est pas du tout assurée temporellement.

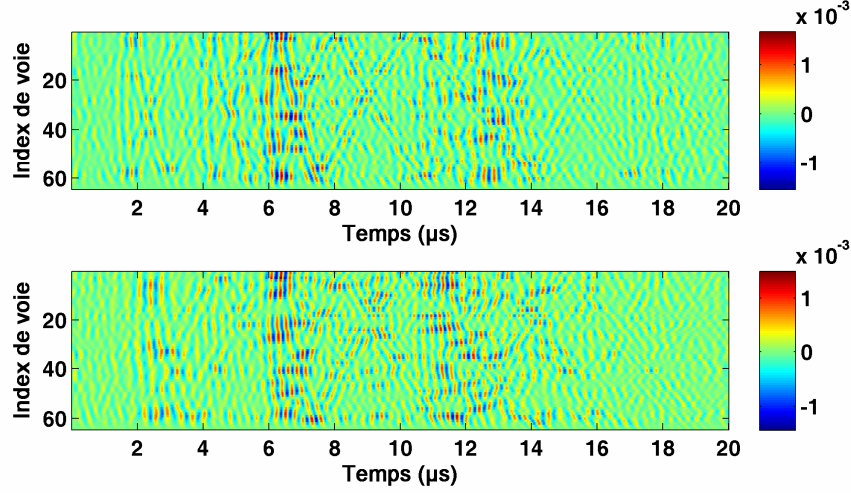


Fig.2.17 Transformée de Fourier inverse des 2 premiers vecteurs propres de la matrice de transfert \mathbf{K} . L'échelle de représentation du niveau acoustique est linéaire.

La reconstruction des vecteurs propres temporels a déjà été utilisée par Yavuz *et al.*^[24] et Mordrant *et al.*. Nous rappelons ici la méthode utilisée par ces derniers.

Comme nous l'avons déjà expliqué, lorsque le réseau émetteur et récepteur sont confondus la matrice \mathbf{K} est symétrique grâce au principe de réciprocité, on peut alors imposer l'égalité entre la matrice \mathbf{U} et \mathbf{V}^\dagger dans la SVD, on a alors dans le cas d'un diffuseur isotrope ponctuel :

$$\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{V}^\dagger(\omega)\mathbf{S}(\omega)\mathbf{V}^*(\omega) = \mathbf{H}^\dagger(\omega)\mathbf{C}(\omega)\mathbf{H}(\omega)$$

Où $\mathbf{H}(\omega)$ est la fonction de Green monochromatique allant du diffuseur au réseau et $\mathbf{C}(\omega)$ la réflectivité apparente de la cible à la pulsation ω . Le vecteur colonne $\mathbf{V}_1(\omega)$ est alors égal à la réponse du diffuseur normalisée au terme de phase $e^{i\pi}$ près. Pour lever cette indétermination, Mordrant *et al.* font l'hypothèse que la phase de la réponse d'un diffuseur à un transducteur doit être une fonction continue de la fréquence. Cette hypothèse est contestable puisque, par exemple, dans le cas d'une fréquence de résonance, on observe des sauts de phase de π . La méthode développée par les auteurs consiste à calculer la différence de phase moyenne le long du réseau pour deux fréquences consécutives et à corriger le saut de π lorsqu'il intervient. Cependant cette méthode nécessite un échantillonnage fréquentiel important et, comme nous l'avons

souligné, devient problématique lorsqu'il apparaît des résonance dans le spectre du diffuseur.

La nouvelle méthode que nous proposons est basée sur un principe différent. Nous partons du principe que pour assurer la focalisation temporelle de l'onde émise, il faut que les différentes fréquences composant le signal envoyé arrivent en phase à la position de la cible. Ainsi nous pouvons repropager nos signaux monochromatiques dans un modèle numérique de guide d'onde pour connaître cette phase et la corriger. Cependant l'utilisation des codes présentés dans la section précédente invalident la méthode DORT car ils demandent une connaissance fine des caractéristiques du guide et, dès lors que ces informations sont connues, une méthode de traitement par champs adaptés (ou *Matched Field Processing* (MFP) en anglais) est beaucoup moins coûteuse en terme de temps de calcul. Nous avons donc eu l'idée d'utiliser un code en eau libre comme moyen de repropagation des vecteurs propres monochromatiques. En effet, L'utilisation de ce code très simple à implémenter permet de s'affranchir des caractéristiques du guide sous réserve que l'on puisse faire l'approximation d'un milieu à vitesse du son constante. Comme nous l'avons vu, la repropagation des vecteurs propres en eau libre donne lieu à l'apparition d'une tache focale correspondant au chemin direct ainsi qu'à plusieurs taches focales correspondant aux réflexions sur les interfaces.

Nous avons fait l'hypothèse suivante : la synchronisation des fréquence de tous les chemins multiples émis pour focaliser temporellement au niveau de la cible initiale passe nécessairement par la synchronisation des fréquences du chemin direct. Ainsi il suffit de connaître la phase au niveau de la cible, c'est-à-dire sur les figures 2.15 b) et d) au niveau du seul pic situé entre les droites en pointillés, pour pouvoir corriger la phase des vecteurs propres monochromatiques et ainsi obtenir une recompression temporelle après repropagation. Comme nous l'avons énoncé, la position de la cible est facilement déduite de la figure 2.15 et ceci sans hypothèse « forte » concernant le guide. Cependant il faut garder à l'esprit que cette position n'est connue que dans la limite du critère de Rayleigh, soit $\lambda R/D$. En effet, dans un modèle aussi simple que celui que nous utilisons, il n'est pas possible de profiter des réflexions pour avoir un effet de super-résolution et ainsi augmenter la résolution pour dépasser la limite due à la diffraction.

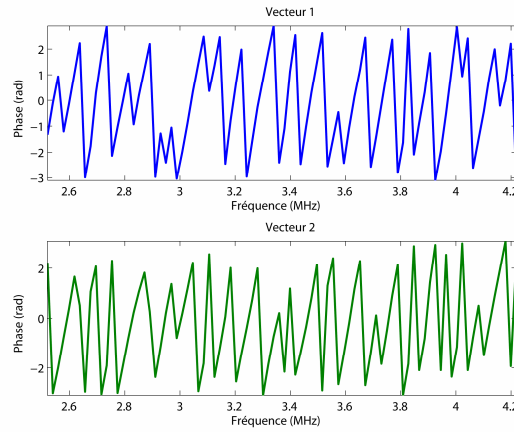


Fig.2.18 Tracé de la phase après repropagation du premier vecteur propre (en bleu) et du deuxième vecteur propre (en vert) au niveau de la cible correspondante.

La figure 2.18 montre la valeur de la phase en fonction de la fréquence au niveau de la cible après repropagation dans le modèle « eau libre ». Comme on peut le voir, la phase n'est pas constante d'où l'impossibilité d'avoir une recompression temporelle des vecteurs propres émis. Cette phase est l'erreur introduite par l'algorithme lors de la SVD de la matrice \mathbf{K} . La correction des vecteurs propres est simplement faite en soustrayant cette erreur de phase à chaque fréquence au vecteur propre monochromatique correspondant ainsi les contributions de chaque fréquence seront en phase au point focal. Nous proposons de baptiser cette technique « SVP » pour Synchronisation des Vecteurs Propres. Sur la figure 2.19 sont représentés les vecteurs propres temporels reconstruits grâce à cette technique.

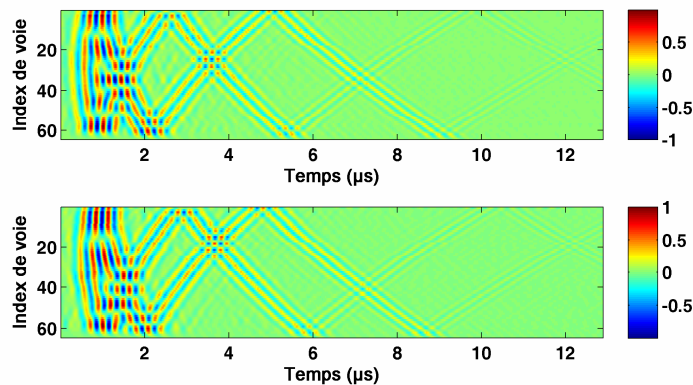


Fig.2.19 Vecteurs propres temporels reconstruits grâce à la technique de synchronisation des phases sur le chemin direct en eau libre.

En comparant à la figure 2.17, on s'aperçoit tout de suite que cette technique permet de remettre en phase les composantes monochromatiques des vecteurs propres de la matrice \mathbf{K} de façon très efficace. Ceci est possible malgré l'imprécision inhérente à l'utilisation d'un modèle en eau libre car comme souvent en acoustique sous-marine, le réseau est assez loin de la cible pour pouvoir faire l'approximation de Fresnel et considérer le trajet direct comme étant une onde plane.

La méthode SVP est synthétisée sur le schéma suivant :

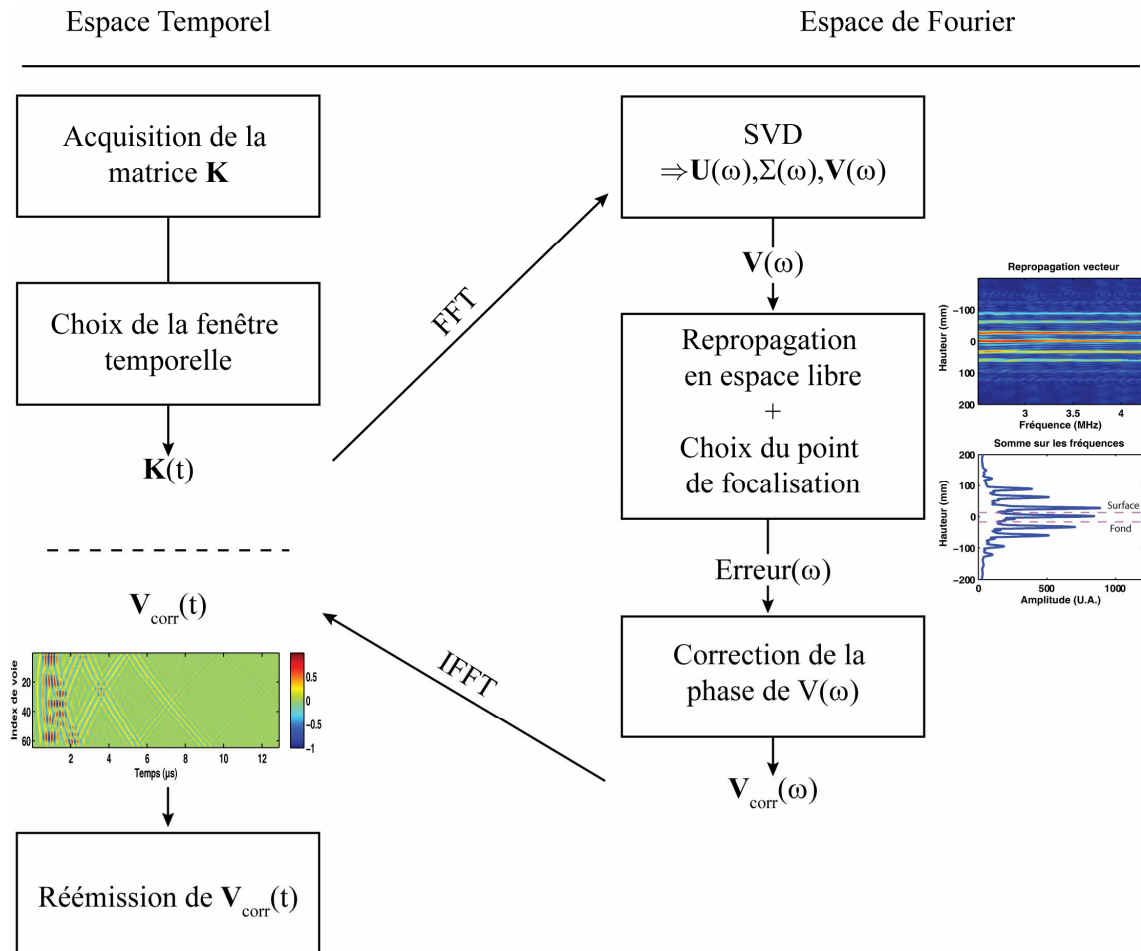


Fig.2.20 Schéma synthétique des étapes de la méthode de synchronisation des vecteurs propres monochromatiques.

La figure 2.21 donne différentes représentations du signal reçu au niveau de la cible la plus échoïque (ici le fil d'alumel). Le champ acoustique est enregistré à la distance de

la cible par un hydrophone à large bande échantillonnant la hauteur d'eau sur 24 mm (cf figure 2.21a). La somme de l'énergie sur $2 \mu\text{s}$ est tracée sur la figure 2.21b après émission des deux premiers vecteurs propres temporels, on voit que la largeur de la tâche focale à -3 dB est de 1,2 mm soit environ 6 fois moindre que la tâche de focalisation en eau libre pour cette distance. Sur la figure 2.21c est tracé le signal temporel enregistré par l'hydrophone à la profondeur de 12 mm, la recompression temporelle du signal est ici manifeste. En effet, le signal envoyé a une durée d'environ $12 \mu\text{s}$ (cf figure 2.19) et le signal reçu a une durée de l'ordre de $1 \mu\text{s}$ très similaire au signal initial envoyé pour faire l'acquisition de la matrice \mathbf{K} .

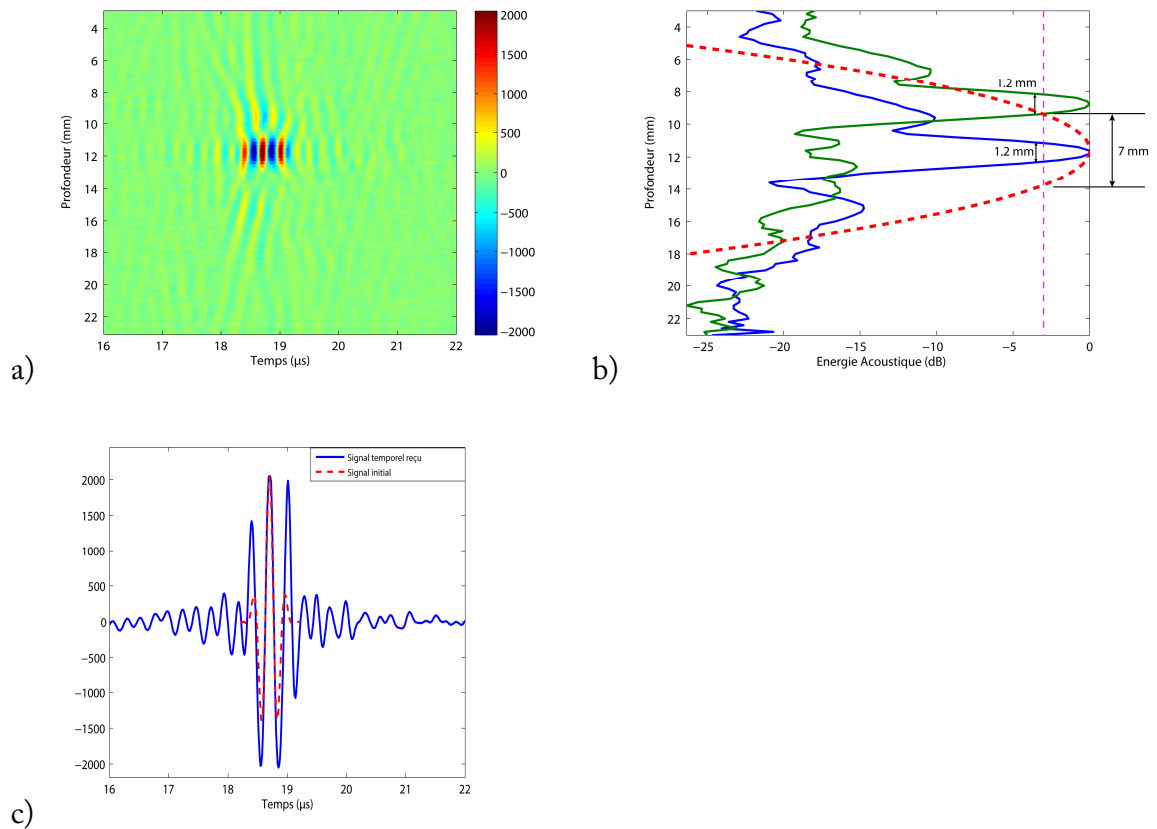


Fig.2.21 a) Scan vertical à la distance de 400 mm de la pression acoustique après réémission du premier vecteur propre temporel. b) Energie acoustique reçue à 400 mm après réémission du premier vecteur propre temporel (en bleu) et du second vecteur propre temporel (en vert), c) signal temporel reçu à 12 mm de profondeur comparé au signal initial émis.

La figure 2.21 rassemble les propriétés spécifiques de la méthode DORT qui en font un outil particulièrement efficace dans le domaine des télécommunications en milieu petit fond. En effet, elle montre que la méthode DORT permet de focaliser spatialement en allant au-delà de la limite de Rayleigh (en pointillés rouge sur la figure) grâce à l'utilisation des réflexions aux interfaces mais surtout, grâce à la technique SVP, elle montre qu'il est aussi possible d'avoir une recompression temporelle d'un signal long sans connaissance du milieu dans lequel s'effectue l'émission, ce qui permet d'envoyer un message binaire dans le guide sans avoir à se soucier de la dispersion géométrique du signal. De plus, la recompression temporelle permet d'augmenter de manière significative le rapport signal à bruit et peut être combinée avec la propriété de la méthode DORT de pouvoir séparer le signal de la cible du signal de réverbération venant du fond du guide comme nous allons le voir dans la suite sur des données en mer.

II.3.2. Utilisation en mer

Les sections précédentes sont limitées à l'étude des performances de la méthode DORT dans des configurations « petites échelles » pour des raisons évidentes de coût et de faisabilité. Nous allons maintenant utiliser la méthode SVP sur des données acquises en 2005 par une équipe du LOA lors de la campagne en mer du PEA « DOREV ». La configuration des expériences a déjà été présentée dans la thèse de Jean-Gabriel Minonzio et dans le *Journal of Acoustical Society of America*^[5]. L'objectif était alors démontrer la faisabilité d'une acquisition DORT en milieu réel et la capacité de la méthode DORT à séparer deux cibles situées à la même distance ou séparer une cible de la réverbération. Les Figs.2.22 et 2.23 montrent le dispositif expérimental utilisé pendant cette campagne en mer.

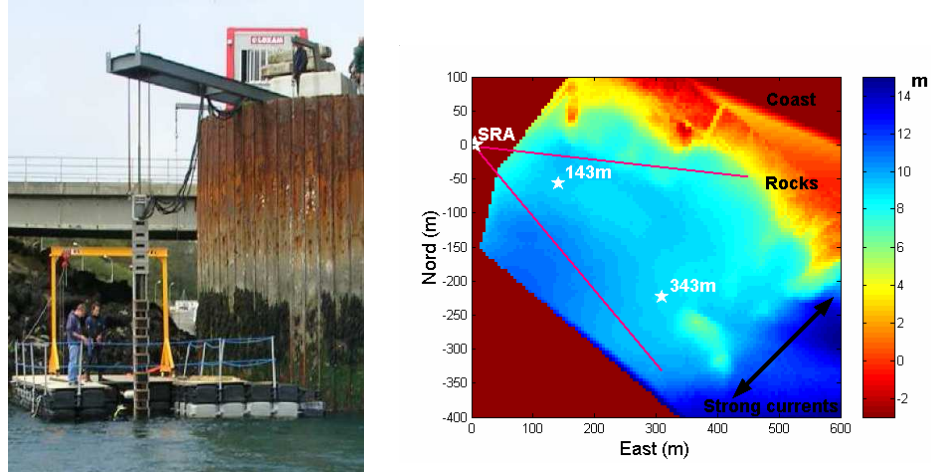


Fig.2.22 Digue de Sainte Anne du Portzic et bathymétrie, la position de la cibles à 143 m est marquée par une étoile blanche.

II.3.3. Expérience avec réverbération

La expérience consiste à détecter la cible TCAR (voir chapitre I) dans la baie de Brest au milieu du chenal à 143 m de l'antenne d'émetteurs-récepteurs fonctionnant à la fréquence centrale de 12kHz. Cette fréquence correspond à une longueur d'onde d'environ 12 cm, ce qui, comparé à nos expériences « petite échelle » où la longueur d'onde est d'environ 0,45 mm, donne un rapport d'échelle de 266. La longueur du guide correspondante pour nos expériences en cuve est donc de 50 cm. Ces informations ainsi que le schéma du dispositif expérimental général sont présentés sur la figure 2.23. La figure 2.24 montre la somme des énergies des Bscan reçus sur l'antenne après l'envoi de la base d'Hadamard ainsi que les valeurs singulières en fonction de la fréquence dans la bande allant de 10 à 15 kHz. La première valeur propre se détache nettement du signal de réverbération avec une différence de niveau d'environ -5dB.

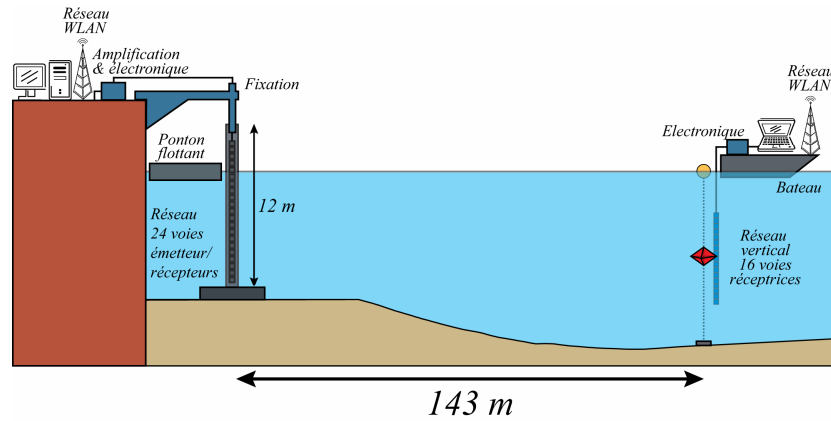


Fig.2.23 Dispositif expérimental et configuration de l'expérience n°1. La cible est une cible TCAR de forme nid d'abeille utilisée dans les expériences radar placée au centre du guide.

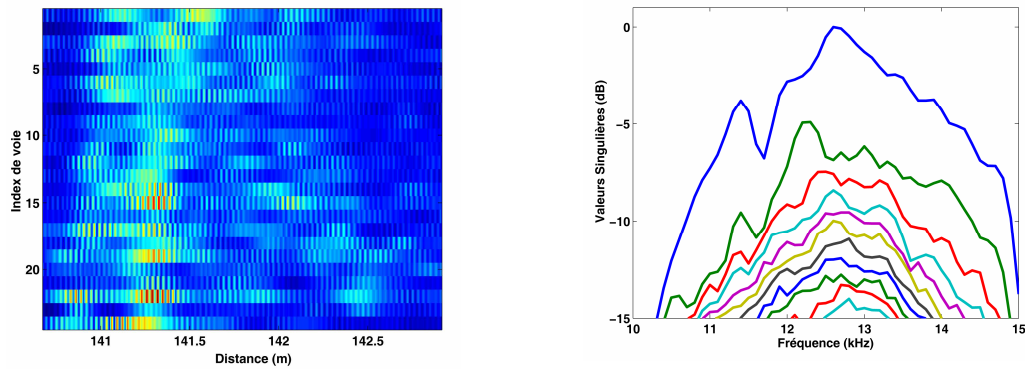


Fig.2.24 Somme de l'énergie des Bscans reçus par l'antenne et valeurs singulières correspondantes en fonction de la fréquence en échelle logarithmique pour la cible placée au milieu du guide.

Après avoir acquis la matrice de transfert \mathbf{K} et effectué sa décomposition en valeurs singulières, on applique la méthode SVP pour reconstruire les vecteurs propres temporels. Les deux premiers vecteurs propres sont tracés sur la figure 2.25.

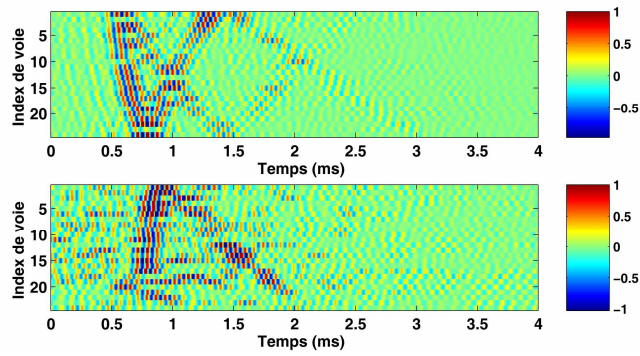


Fig.2.25 Vecteur propres temporels reconstruits après correction de phase grâce à la méthode.

Le premier vecteur propre temporel correspond bien à la forme d'onde attendue pour une cible au centre d'un guide tandis que le second vecteur propre correspond au signal venant de la réverbération du fond marin avec un niveau élevé pour le front direct provenant du fond et le front provenant du fond après réflexion à la surface. L'acquisition de ces données ayant été faite en 2005, les vecteurs propres temporels n'ont pas pu être repropagés dans le milieu pour comparer l'efficacité de la méthode DORT en télécommunication dans un milieu réel contenant de la réverbération par rapport à l'émission simple du retourné temporel d'un signal reçu après envoi d'une onde plane.

II.3.4. Robustesse de la méthode SVP

Les sections précédentes ont démontré que l'on pouvait reconstruire avec succès les vecteurs propres temporels à partir des vecteurs propres monochromatiques issus de la méthode DORT sans connaissance *a priori* des paramètres du guide autres que la vitesse du son dans le milieu. Lors de cette reconstruction, nous faisons en sorte que la phase de chaque vecteur monochromatique ne dépende pas de la fréquence au point de focalisation. Les expériences suivantes vont montrer que cette condition est assez robuste par rapport aux conditions extrêmes présentées par un guide aux interfaces parfaitement réfléchissantes ou un guide dont le rapport $\lambda R / D$ est égal à la hauteur du guide.

La figure 2.27 montre le dispositif expérimental utilisé pour la première série d'expériences. Le guide est constitué d'un fond en acier afin d'avoir le plus de réflexions possibles aux interfaces. De cette manière, nous saurons jusqu'à quel point la technique permet de profiter des réflexions du guide pour focaliser finement. La fenêtre temporelle utilisée pour la méthode DORT prend en compte l'écho spéculaire ainsi que les 16 premières réflexions sur les interfaces. La théorie des images prédit que la tache de focalisation la plus fine sera de l'ordre de $\lambda R / 17D$, soit 0,7 mm.

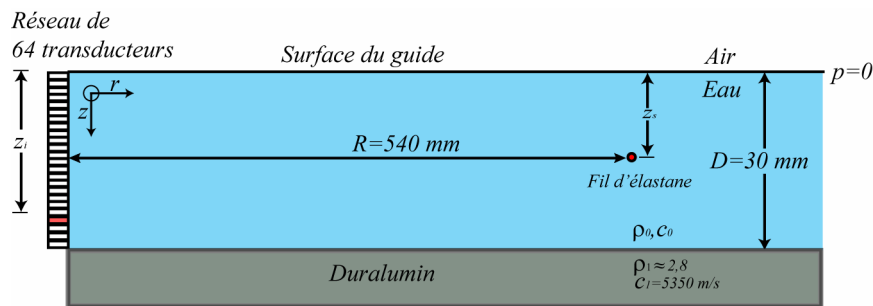


Fig.2.26 Dispositif expérimental et configuration de l'expérience avec interface très réfléchissante.

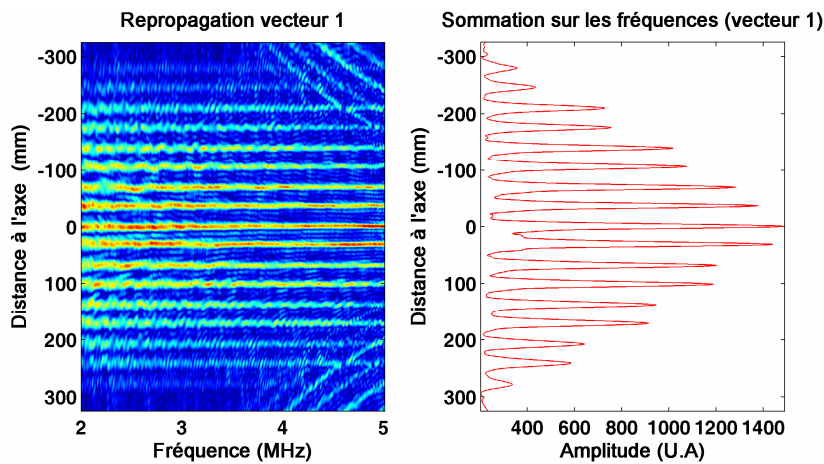


Fig.2.27 Repropagation du premier vecteur propre monochromatique en espace libre pour les fréquences allant de 2 MHz à 5 MHz.

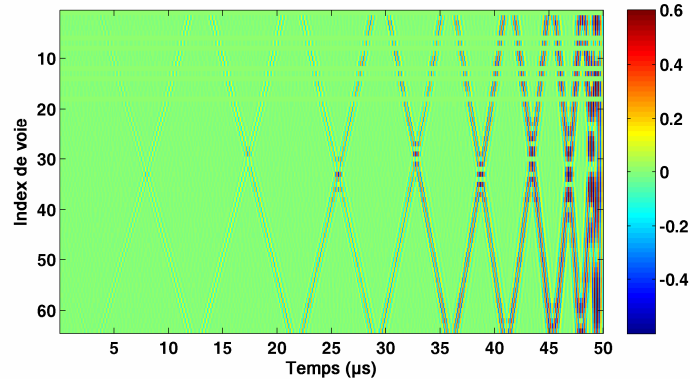


Fig.2.28 Vecteur propre temporel reconstruit pour une cible dans un guide d'onde avec fond en duralumin (le signal présenté est le signal émis par la baie électronique).

Les figures 2.27 et 2.28 montrent respectivement la repropagation du premier vecteur propre en eau libre et le vecteur propre temporel reconstruit. Un scan de la pression à la distance de la cible est réalisé à l'aide d'un hydrophone après émission du premier vecteur propre. Le même scan est effectué après émission du retourné temporel du signal reçu après une émission monomode pour s'astreindre des chemins multiples à l'aller. Cette comparaison montre que la capacité de focalisation de l'antenne n'est pas dégradée par l'utilisation de SVP. En effet, la largeur de tache focale dans ce cas est équivalente à l'envoi du retourné temporel (voir figure 2.29). Les chemins d'ordre élevés ne semblent pas gêner la reconstruction. Normalement, les fronts d'ondes isophases étant de plus en plus courbés au fur et à mesure que le nombre de réflexions augmente, on pourrait penser que l'erreur que l'on fait en choisissant la position supposée de la cible devrait avoir de plus en plus d'incidence sur la reconstruction de ces fronts. Or on observe que ce n'est pas le cas ici, la méthode SVP est donc utilisable en milieu très réverbérant. Par contre, on remarque une dégradation des lobes secondaires dont le niveau remonte à -10 dB.

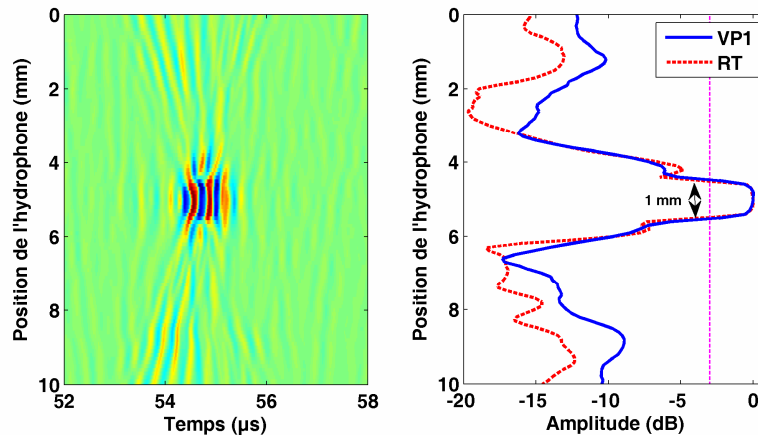


Fig.2.29 Comparaison des repropagations par RT et par la méthode DORT puis SVP. a) Scan vertical à la distance de 540 mm de la pression acoustique après réémission du premier vecteur propre temporel b) Energie acoustique reçue après réémission du premier vecteur propre temporel (en bleu) et du retourné temporel (en rouge pointillé).

Ainsi nous avons vu que la mise en défaut de l'approximation paraxiale ne perturbait pas la refocalisation du vecteur propre temporel reconstruit, la comparaison avec le RT montre une tache de focalisation de largeur équivalente.

Maintenant nous allons voir les résultats de la méthode quand la tache de focalisation en eau libre à une largeur équivalente à la hauteur du guide. Dans cette configuration, la repropagation numérique en eau libre montre une interférence des réflexions sur les interfaces avec la tache de focalisation du chemin direct. Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 2.30, nous utilisons un guide de même longueur que précédemment mais dont la hauteur est deux fois moindre.

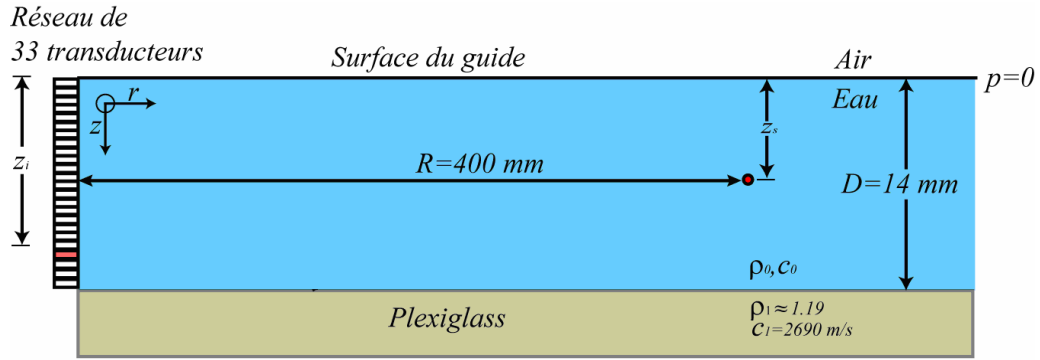


Fig.2.30 Dispositif expérimental et configuration de l'expérience dont la tache focale en eau libre est égale à la hauteur du guide.

La figure 2.31 montre la repropagation des vecteurs monochromatiques en eau libre. La largeur de la tache de focalisation est égale à 14 mm, on voit que la position extraite en sommant l'intensité des taches de focalisation sur toute la bande de fréquence est faussée du fait des interférences entre l'image réelle et les deux premières images virtuelles. Malgré cette erreur, la repropagation du vecteur propre temporel focalise bien spatialement et temporellement au niveau de la cible et la largeur de la tache de focalisation est de 1,6 mm. On bénéficie bien des neuf chemins différents même en faisant une erreur sur le point servant à synchroniser les phases. Ceci est dû au fait que l'isophase à la distance de la cible est quasiment plane.

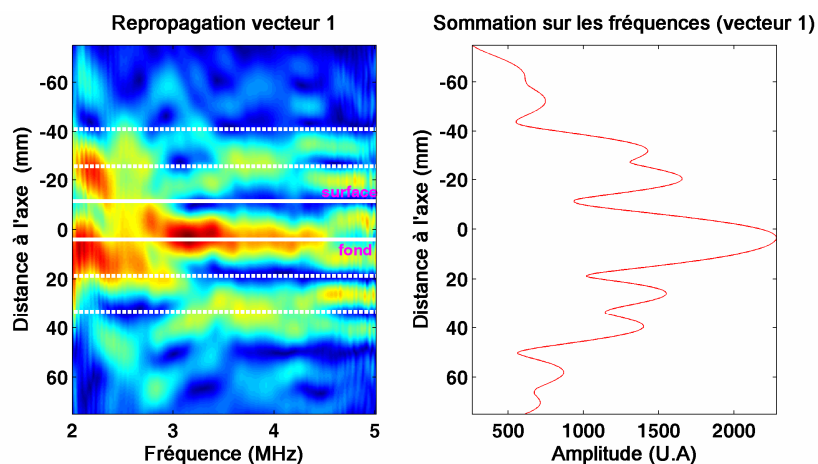


Fig.2.31 Dispositif expérimental et configuration de l'expérience dont la tache focale en eau libre est égale à la hauteur du guide.

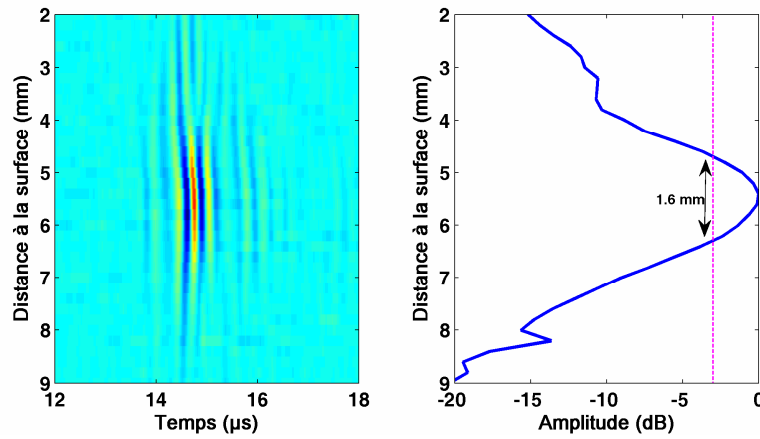


Fig.2.32 Repropagation dans le guide du premier vecteur propre reconstruit et énergie acoustique reçue sur l'hydrophone en fonction de la distance à la surface.

II.4. Emission de codes orthogonaux

Dans cette section, nous nous sommes intéressés au problème de la durée de l'acquisition DORT. La nécessité d'acquérir la totalité de la matrice inter-élément est l'un des principaux inconvénients de la méthode DORT. Le temps d'acquisition en milieu marin peut devenir long devant le temps caractéristique du milieu et on ne peut plus considérer le milieu comme stationnaire. Par exemple, lorsque la surface de l'eau est animée de mouvements dus aux vagues, ceci a une influence sur les valeurs singulières de la matrice de transfert \mathbf{K} . Dans le chapitre IV, nous étudions de manière théorique l'influence de la non stationnarité lors de l'acquisition de la matrice \mathbf{K} sur le comportement des valeurs propres, mais une autre approche consiste à contourner le problème en réduisant le plus possible ce temps d'acquisition tout en conservant un rapport signal sur bruit (RSB) convenable grâce à l'émission de codes orthogonaux.

L'émission de codes orthogonaux est connue et utilisée depuis de nombreuses années dans le domaine des télécommunications. Elle vise à optimiser la capacité de transmission d'un réseau d'émetteurs vers un ensemble d'utilisateurs. Dans le cas qui nous intéresse, nous allons montrer que ces techniques réduisent au maximum le temps d'acquisition de la matrice des réponses impulsionnelles inter-élément, tout en gardant un RSB élevé. Nous avons utilisé trois méthodes « d'acquisition quasi-instantanée » de

la matrice \mathbf{K} qui ont été déjà présentées dans la thèse de Thomas Folégot mais dont les performances n'ont pas été testées que dans un milieu non stationnaire :

- la première méthode, et aussi la méthode la plus simple, est une méthode dite TDMA pour *Time Division Multiple Access*. Le multiplexage se fait temporellement en estimant grossièrement la dispersion temporelle τ de l'impulsion envoyée. Le signal envoyé est la concaténation de la base d'émission choisie avec un temps τ intercalé entre chaque vecteur de la base. La matrice \mathbf{K} est reconstruite par découpage du signal reçu en N fenêtres temporelles de durée τ .
- La deuxième méthode développée au LOA par Thomas Folégot *et al.* est une méthode CDMA pour *Code Division Multiple Access*. Chaque émetteur envoie un code appelé Adaptative Instant Record Signal (A.I.R.S.), la réponse du milieu à cette somme de code est enregistrée puis projetée sur chaque code pour en extraire la matrice inter-élément^[25].
- La troisième méthode est aussi une méthode CDMA utilisant une famille de codes binaires « pseudo-bruit » (ou *pseudo-noise* (PN) en anglais) appelés famille Kasami ^[26]. Cette famille est une famille dérivée des codes Gold, eux-mêmes dérivés des m-codes (pour *Maximum-length shift-register codes*). Les codes Kasami ont été spécialement créés pour les télécommunications, notamment ils sont larges bandes (ce qui est primordial pour une utilisation DORT), ils s'apparentent au bruit pour éviter la détection d'information par un tiers d'où le nom de pseudo-bruit et surtout ils possèdent un niveau de lobes secondaires d'auto-corrélation très bas.

Pour une description détaillée, on se référera à la thèse de Thomas Folégot.

Dans la suite, nous présentons les résultats de l'utilisation de ces différents codes dans une configuration ultrasonore présentant un état de surface perturbé par des vagues sinusoïdales. L'objectif est de donner un aperçu des différents codes que l'on peut utiliser pour acquérir la matrice de transfert dans un milieu non stationnaire et de présenter leur avantages et inconvénients. Un schéma du dispositif expérimental utilisé est présenté sur la figure 2.33.

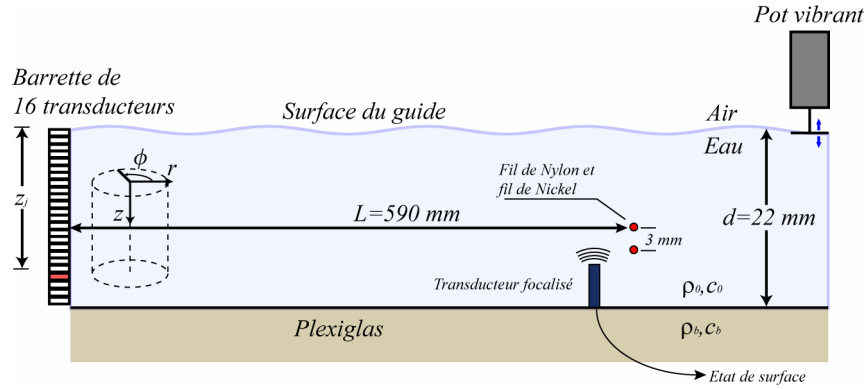


Fig.2.33 Dispositif expérimental servant à mesurer l'efficacité des codes orthogonaux pour une acquisition DORT en milieu non stationnaire. Un transducteur focalisé permet d'acquérir l'amplitude des vagues présentes pendant l'acquisition.

La figure 2.34 montre l'effet d'une surface perturbée sur le niveau des valeurs singulières de la matrice \mathbf{K} . On se trouve dans un cas où la probabilité d'un faux négatif pour la détection d'une cible est très élevée. En effet, dans le cas présenté, la valeur singulière associée au second fil est complètement confondue avec les autres valeurs singulières.

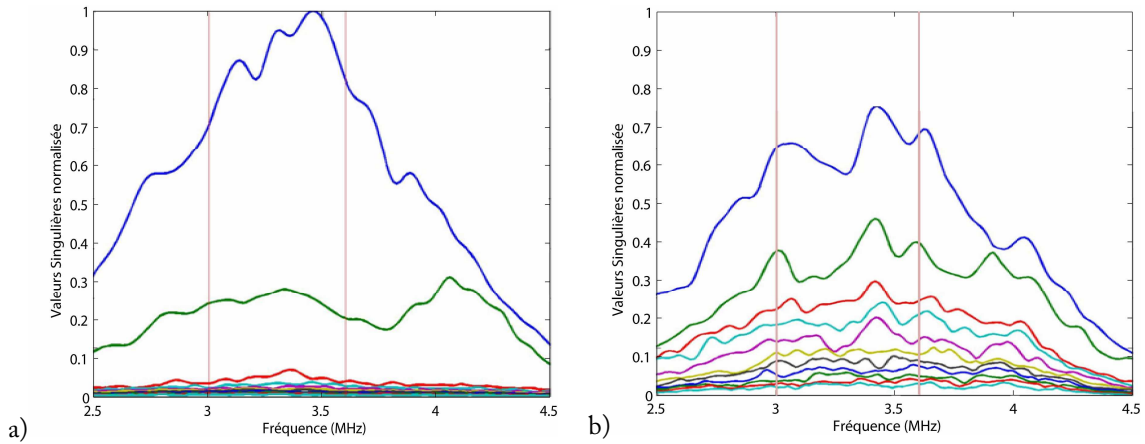


Fig.2.34 Valeurs singulières en fonction de la fréquence pour 2 fils placés dans un guide de 22 mm de profondeur à 59 cm du réseau a) pour une expérience sans vagues b) pour une expérience présentant des vagues ayant un écart-type de 0.6 mm. Le réseau est constitué de 16 voies et possède un pas inter-élément de 1.38 mm. Le premier fil est un fil de nylon de 0.1 mm de diamètre, le second est un fil de nickel de 0.07 mm de diamètre.

La repropagation dans le modèle R.A.M. des vecteurs propres monochromatique du cas stationnaire est présentée sur la figure 2.35.

La largeur de la tache focale théorique en eau libre pour ces paramètres de guide et de fréquence est de 11,5 mm. Comparée à la largeur de 2 mm mesurée sur la figure 2.35, cette valeur nous indique que pour cette configuration la méthode DORT permet de bénéficier d'environ 6 chemins différents. Ces deux taches de focalisation sont utilisées dans la suite pour estimer l'efficacité des codes orthogonaux.

Les premières expériences utilisant les codes orthogonaux ont été réalisées avec un niveau de vague de 0,85 mm crête à crête correspondant à un écart-type de 0,6 mm. La durée de propagation de l'onde dans le guide est de l'ordre de 800 μ s, la fréquence des vagues étant de 3 Hz on peut supposer le milieu immobile pendant la propagation aller-retour du signal.

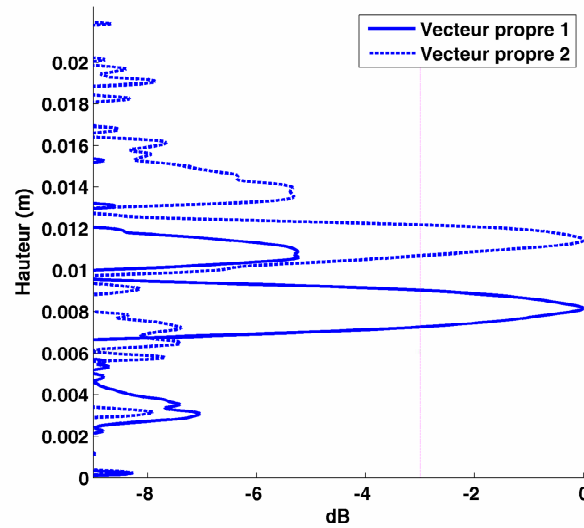
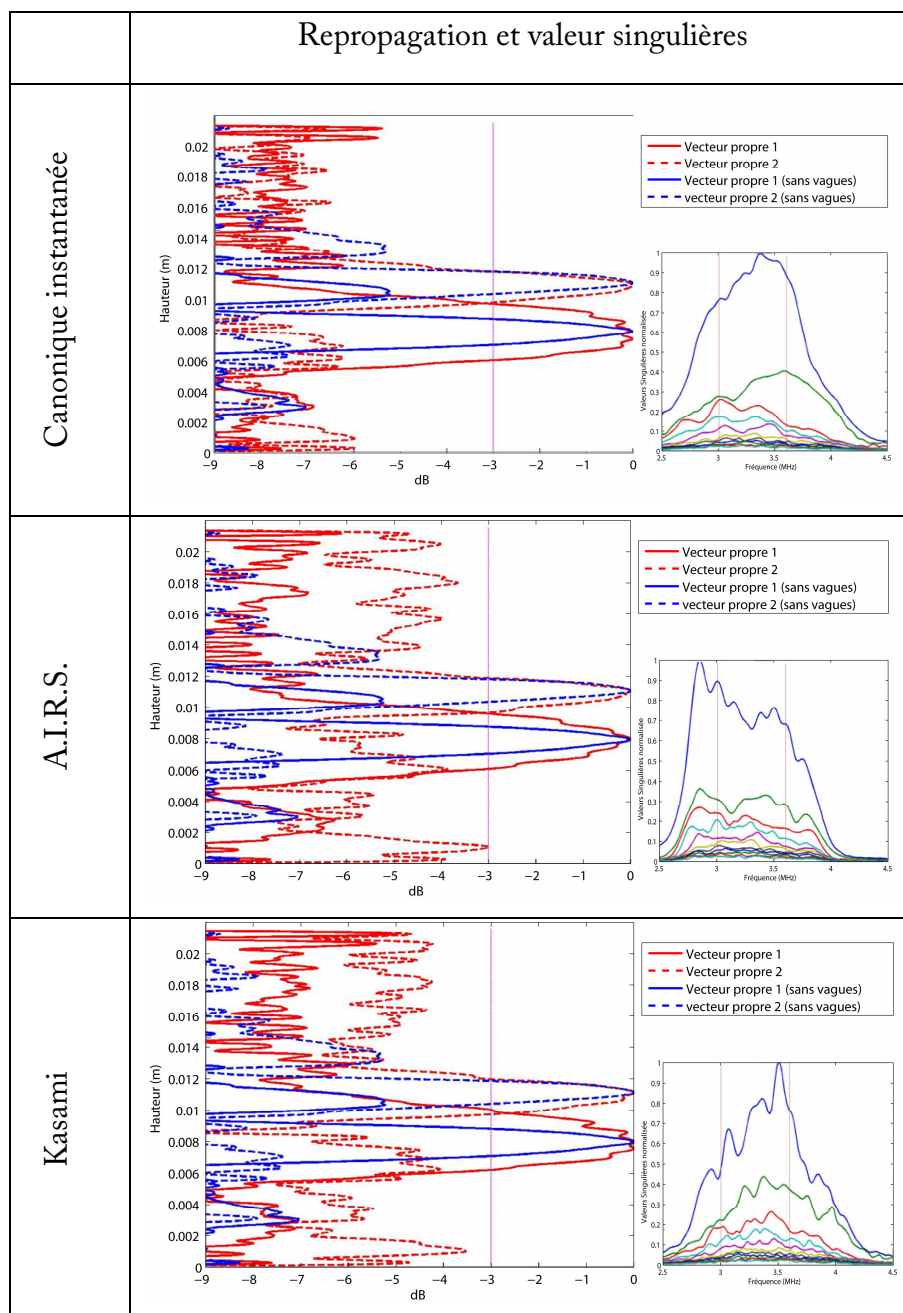


Fig.2.36 Repropagation des deux premiers vecteurs propres dans le modèle R.A.M. moyenné sur les fréquences allant de 3 MHz à 3,6 MHz. La largeur de la tache de focalisation à -3 dB est de 2 mm.

Ces expériences montrent que l'acquisition de la matrice de transfert \mathbf{K} de manière instantanée est tout à fait possible et que les valeurs singulières provenant de la non stationnarité du milieu sont suffisamment faibles pour les différencier de la valeur singulière associée à la seconde cible. La repropagation des deux premiers vecteurs propres dans le modèle R.A.M. semble montrer que l'on peut localiser les cibles en utilisant comme paramètre la hauteur du guide moyenne dans le modèle numérique à interface plane. Cependant les repropagations dépendent fortement de l'état de vague au moment de l'acquisition. On se retrouve dans le même cas de figure que les expériences menées sur le comportement du RT en milieu non stationnaire. L'acquisition instantanée de la matrice \mathbf{K} ne suffit pas à s'abstraire de l'état de surface irrégulier à un instant donné et changeant du guide. Par conséquent, pour avoir une repropagation numérique parfaite, il faudrait avoir un modèle avec exactement le même état de surface. Comme cela est difficile, voire impossible, il est tout de même nécessaire de réaliser une moyenne des matrices \mathbf{K} sur plusieurs acquisitions pour pouvoir localiser les cibles.

Le tableau récapitulatif suivant montre les repropagations numériques et les valeurs singulières moyennées sur 10 réalisations. Les taches focales sont bien localisées et leur largeur est comparable à celles des tache focale en milieu stationnaire. La tache focale en

eau libre théorique est de 11,5 mm. La théorie admise est que l'état de surface d'un guide ne perturbe pas le chemin direct ni le chemin ne comportant qu'une réflexion sur le fond^[27]. Ici nous montrons que l'on va au-delà de ce critère puisque les taches de focalisation sont de taille équivalente aux taches en guide stationnaire. Etrangement, c'est la focalisation sur la première cible qui est le plus dégradée par la présence de vagues et l'acquisition instantanée de K . Pour le moment, nous n'avons pas d'explications pour ce phénomène.



Tab.1 Tableau récapitulatif des résultats d'acquisitions instantanées

Comme nous pouvons le voir, les résultats des localisations de cibles sont équivalentes pour les trois codes. Le choix du code à utiliser se fera donc en fonction des caractéristiques propres à l'expérience. Notamment, la durée du signal est limitée par le temps d'aller-retour de l'onde. Les codes Kasami ont une longueur qui augmente très

vite avec le nombre de voies utilisée: pour $2^{m/2}$ voies, les codes sont composés de 2^m-1 symboles binaires. Ainsi lorsque l'on multiplie le nombre de voie par 2, on multiplie la durée des codes par 4. Les autres codes utilisés, eux, ont leur durée qui augmente linéairement avec le nombre de voies. Une autre considération à prendre en compte est le rapport signal sur bruit (RSB) comme le montre Thomas Folégot dans sa thèse, l'utilisation de codes CDMA (kasami, AIRS) par rapport au TDMA (acquisition canonique instantanée) permet d'avoir un gain du RSB dû à l'utilisation du filtrage adapté pour reconstruire la matrice \mathbf{K} à partir du signal reçu.

II.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les outils nécessaires aux théories développées dans ce mémoire. Nous avons présenté la définition de la fonction de Green et détaillé deux méthodes de calcul de celle-ci, la méthode des images et la méthode de décomposition en modes normaux. Par la suite, la méthode DORT qui est le centre des études qui vont être présentées a été décrite et nous avons introduit une nouvelle méthode de reconstruction des « vecteurs propres temporels » de l'ORT. Cette technique, baptisée SVP, a été appliquée avec succès sur des données d'expériences en mer et permet d'utiliser la méthode DORT dans le domaine des télécommunications. Nous avons montré que cette technique est très robuste face à différentes configurations potentiellement problématiques. Dans le futur, la méthode SVP pourra servir en électromagnétisme dans le domaine des télécommunications ou en médical pour la destruction de calculs rénaux.

Pour terminer, nous avons présenté les résultats d'acquisitions instantanées de la matrice \mathbf{K} grâce à l'utilisation de codes orthogonaux. Nous avons montré que l'utilisation de ces codes permettait d'utiliser la méthode DORT dans un milieu non stationnaire comme un guide d'onde dont la surface présente des vagues mais que leur utilisation nécessitait quand même de réaliser des moyennes. Leurs efficacités étant équivalentes dans les configurations qui ont été présentées, le choix du code à émettre se fera au cas par cas, en fonction de la distance, du nombre d'émetteurs et de la présence ou non de réverbération.

Bibliographie

- ¹ E. Kerbrat, C. Prada, D. Cassereau and M. Fink, "Ultrasonic non destructive testing of scattering media using the Decomposition of the Time Reversal Operator", IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. **49**(8), 1103-1113 (2002).
- ² N. Mordant, C. Prada, and M. Fink, "Highly resolved detection and selective focusing in a waveguide using the D.O.R.T. method," J. Acoust. Soc. Am. **105**, 2634–2642 (1999).
- ³ C. F. Gaumond, D. M. Fromm, J. F. Lingeitch, R. Menis, G. F. Edelmann, D. C. Calvo, and E. Kim, "Demonstration at sea of the decomposition-of-the-time-reversal-operator technique," J. Acoust. Soc. Am. **119**, 976–990 (2006).
- ⁴ T. Folégot, C. Prada, and M. Fink, "Resolution enhancement and separation of reverberation from target echo with the time reversal operator decomposition," J. Acoust. Soc. Am. **113**, 3155–3160 (2003).
- ⁵ C. Prada, J. De Rosny, D. Clorennec, J. G. Minonzio, A. Aubry, M. Fink, L. Bernière, S. Hibrat, P. Billand, and T. Folégot, "Experimental detection and focusing in shallow water by Decomposition of the Time Reversal Operator," J. Acoust. Soc. Am. **122**, 768–761 (2007).
- ⁶ E. Kerbrat, D. Clorennec, C. Prada, D. Royer, D. Cassereau, M. Fink, "Detection of cracks in a thin air-filled hollow cylinder by application of the DORT method to elastic components of the echo", Ultrasonics **40**, 715-720 (2002).
- ⁷ A. Dubois, K. Belkebir and M. Saillard, "Localisation and characterization of two-dimensional targets buried in a cluttered environment", Inverse Problems **20**, S63-S79 (2004).
- ⁸ G.V. Frisk, "Ocean and Seabed Acoustics: A Theory of Wave Propagation", édité par Prentice Hall PTR, 1993
- ⁹ L. M. Brekhovskikh, "Fundamentals of Ocean Acoustics", édité par Springer, 3^{ème} édition, 2003
- ¹⁰ I. Tolstoy, C.S. Clay, "Ocean acoustics : Theory and experiment in underwater sound", édité par The American Institute of Physics, Inc, 1987
- ¹¹ C. L. Pekeris, "Theory of propagation of explosive sound in shallow water", Geol. Soc. Am. Mem., **27**, 1948
- ¹² C. Prada, J.-L. Thomas, and M. Fink, "The iterative time reversal process: analysis of the convergence," J. Acoust. Soc. Am. **97**(1), 62-71, (1995).
- ¹³ C. Hazard, K. Ramdani, "Selective acoustic focusing using time-harmonic reversal mirrors", SIAM J. Appl. Math., **64**(3): 1057-1076 (2004)
- ¹⁴ E. Kerbrat, "Imagerie par retournement temporel en contrôle non destructif des matériaux", Thèse de l'Université Denis Diderot, Décembre 2001
- ¹⁵ T. Folégot, "Détection par Décomposition de l'Opérateur Retournement Temporel en Acoustique Sous-Marine par Petits Fonds", Thèse de l'Université Denis Diderot, Mars 2003.

- ¹⁶ L. Borcea, G. Papanicolaou, C. Tsogka, J. Berryman, "Imaging and time reversal in random media", *Inverse Problems*, **18**(5), 1247-1279, (2002)
- ¹⁷ A. Devaney, "Transmission mode time-reversal super-resolution imaging", *J. Acoust. Soc. Am.*, **113**(5), 2742-2753, (2003)
- ¹⁸ V. Miette, L. Sandrin, F. Wu, M. Fink, "Optimisation of time reversal processing in titanium inspections", *IEEE Ultrasonic Symp.*, 643-647, (1996)
- ¹⁹ J.-L. Thomas, F. Wu, M. Fink, "Time reversal focusing applied to lithotripsy", *Ultrasonic Imaging*, **18**, 106-121, (1996).
- ²⁰ M. D. Collins, "A split-step Padé solution for the parabolic equation method," *J. Acoust. Soc. Am.* **93**, 1736–1742 (1993).
- ²¹ T. C. Yang and T. W. Yates, "Acoustic inversion of bottom reflectivity and bottom sound-speed profile.", *IEEE J. Oceanic Eng.*, **21**(4), 367-376, (1996).
- ²² M.O. Collins and E. K. Wostwood, "A higher-order energy-conserving parabolic equation for range-dependent ocean depth, sound speed, and density", *J. Acoust. Soc. Am.* **89**(3), 1068–1075 (1991).
- ²³ F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter and H. Schmidt, "Computational Ocean Acoustics", édité par American Institute of Physics, New York.
- ²⁴ M.E. Yavuz and F.L. Teixeira, "Space-frequency ultrawideband time-reversal imaging", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, **46**(4), 1115-1124 (2008)
- ²⁵ T. Folégot, J. de Rosny, C. Prada, and M. Fink, "Adaptive instant record signals applied to detection with time reversal operator decomposition", *J. Acoust. Soc. Am.* **117**(5), 3757–3765 (2005).
- ²⁶ J. G. Proakis, "Digital Communications", 4ième édition, édité par McGraw Hill, New York
- ²⁷ W. A. Kuperman, W. S. Hodgkiss, H. C. Song, T. Akal, C. Ferla, and D.R. Jackson, "Phase conjugation in the ocean: Experimental demonstration of an acoustic time-reversal mirror," *J. Acoust. Soc. Am.* **103**, 25-40(1998).

Chapitre III

Caractérisation d'une cible élastique dans un guide d'onde en eau peu profonde par Décomposition de l'Opérateur

Retournement Temporel

Sommaire

1. Position du problème et de sa géométrie	93
2. Cas d'un diffuseur ponctuel pseudo-isotrope	96
2.1. Théorie	96
3. Cas de 2 diffuseurs ponctuels pseudo-isotropes	102
4. Cas d'un diffuseur axisymétrique étendu ($2a > \lambda R/D$)	104
4.1. Géométrie du problème	104
4.2. Analyse et théorie	104
4.3. Résultats expérimentaux	109
5. Conclusion	118
Annexe A : Première valeur singulière pour un diffuseur isotrope dans un guide d'onde	119
Annexe B : Calcul du terme de couplage entre h_s et $\partial_z h_s$	120
Bibliographie	122

Dans un guide d'onde en eau peu profonde, la détection active de cibles et leur caractérisation sont des domaines de recherches très actifs dans le domaine de la défense sous-marine. Si les méthodes SONAR sont très efficaces en eau profonde, il n'existe que très peu de méthodes pour caractériser une cible dans un guide d'onde sous-marin.

La principale difficulté rencontrée lorsque que l'on essaie de caractériser une cible en guide d'onde avec les ultrasons est due à la nature dispersive du guide d'onde. En effet, une impulsion acoustique émise par une source que l'on peut considérer ponctuelle se transforme en un signal étendu avant même d'atteindre la cible du fait des réflexions multiples. Après avoir atteint la cible et avoir été réfléchi, elle est encore une fois modifiée par la fonction transfert du guide. Par conséquent, la réponse fréquentielle de la cible enregistrée dans un guide contenant les informations concernant la forme de l'objet étudié est perturbée par les réflexions à la surface et sur le fond qui dépendent fortement de la position de l'émetteur-récepteur dans le guide^[1,2]. L'extraction de la signature de la cible est donc très difficile dans un guide d'onde en eau peu profonde, même si le signal acquis est dénué de toute réverbération venant du fond marin.

Pour résoudre ce problème, la méthode la plus répandue est de déconvoluer le signal acquis par le récepteur par la fonction de transfert du guide. Cependant il est communément admis que le problème de la déconvolution de la fonction de transfert d'un guide à l'aide d'un seul récepteur est un problème mal posé, en d'autres termes que la solution est non unique pour un certain jeu de données. Il faut donc généralement utiliser une antenne d'émission-réception verticale ce qui permet d'échantillonner toute la hauteur d'eau et d'avoir accès à la totalité des modes du guide. Par exemple, Mignerey et Finette ont réalisé avec succès une déconvolution sur plusieurs voies en imagerie passive dans un guide d'onde océanique en utilisant une estimation des paramètres du guide (conditions limite aux interfaces, bathymétrie et géométrie du guide)^[3,4].

En ce qui concerne l'imagerie active, plusieurs études concernent le problème, direct ou inverse, de la diffusion acoustique d'une cible dans un guide d'onde à l'aide d'une antenne d'émetteurs-récepteurs. En particulier, la pression acoustique diffusée par une cible étendue est analysée par Yang *et al.*, en termes de couplage de modes entre le champ incident et le champ diffusé^[5]. Il y est montré que l'utilisation d'une antenne

d'émetteurs-récepteurs est une condition nécessaire à l'acquisition d'un nombre suffisant de modes propres du guide pour extraire la dépendance angulaire du champ diffusé.

Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, en utilisant la méthode DORT, on exploite les trajets multiples reliant la cible à l'antenne et ceux-ci nous permettent ainsi de focaliser une onde acoustique avec une précision allant au-delà du critère de Rayleigh. La résolution du système est augmentée car l'ouverture effective de l'antenne dans le guide d'onde est démultipliée par les réflexions sur les parois en comparaison à la même antenne en grand fond.

Le but de ce chapitre est de montrer que la méthode DORT est un outil particulièrement adapté à la caractérisation de cible dans un environnement océanique petit fond inconnu à l'aide d'une antenne verticale de capteurs de champ de pression. En effet, une des caractéristiques de la méthode DORT est son utilisation de la décomposition en valeurs singulières (SVD) pour séparer, dans une certaine mesure, les phénomènes physiques liés à la propagation de ceux liés uniquement à la diffusion de la cible. En utilisant cette propriété, nous avons combiné une approche similaire à celle utilisée par Ingenito^[1] faisant appel à la théorie des modes normaux avec les propriétés intrinsèques de la SVD pour donner une forme analytique de la dépendance fréquentielle de la première valeur singulière d'une cible. Ainsi, il a été démontré que la première valeur singulière de la matrice des réponses inter-élément est proportionnelle à la fonction de forme de la cible, c'est-à-dire la réponse fréquentielle monostatique en eau libre. Nous étudions tout d'abord le cas simple d'une cible ponctuelle isotrope ne possédant qu'une seule valeur singulière. Puis nous adaptons les résultats obtenus au cas de deux cibles et enfin nous considérons le cas plus complexe d'une cible étendue anisotrope. Pour chaque cas de figure, la théorie sera comparée à des expériences effectuées dans un guide d'onde ultrasonore.

III.1. Position du problème et de sa géométrie

Le problème concerne la caractérisation acoustique d'un diffuseur se trouvant dans un guide, à grande distance, à l'aide de transducteurs. Cette thèse se concentrant sur les

applications de la méthode DORT en acoustique sous-marine, cette étude se limitera aux guides d'onde océaniques dits « petits fonds ».

Considérons donc un diffuseur placé dans un guide d'onde océanique inconnu. Pour caractériser cette cible nous disposons d'une antenne de transducteurs située suffisamment loin de la cible pour pouvoir se placer dans l'approximation de champ lointain et possédant assez de capteurs pour pouvoir échantillonner le champ acoustique sur toute la colonne d'eau de façon satisfaisante. Par exemple, pour les expériences présentées dans ce manuscrit, les antennes utilisées ont un pas inter-élément à peu près égal à la longueur d'onde de la fréquence centrale de fonctionnement des transducteurs. La surface du guide est libre et représente donc une condition limite de type Dirichlet ; quant au fond, il est considéré comme étant semi-infini constitué d'un matériau dont la célérité et la densité sont toutes deux nettement plus grandes que celles du guide. Ces différentes considérations sont celle du guide de Pekeris présenté dans le chapitre II et sont résumées sur la figure 3.1.

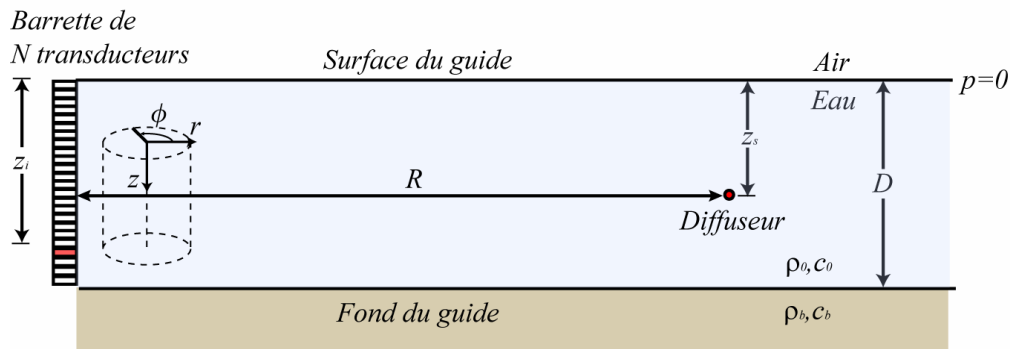


Fig.3.1 Schéma présentant les caractéristiques du guide et les notations utilisées.

Comme choix de paramètre de reconnaissance de cible, nous utilisons la fonction de forme retroréfléchiée^[6] également appelée réponse fréquentielle monostatique en eau libre ou plus simplement signature diffusante de la cible^[5]. Les figures 3.2a et 3.2b illustrent, avec l'exemple d'une sphère en acier, le problème que peut poser la caractérisation d'un diffuseur lorsqu'il est situé dans un environnement océanique « petit fond ». En eau libre, il apparaît clairement que le signal retroréfléchié dépend faiblement de la position du transducteur et que les oscillations sont liées aux résonances de la

sphère. Par contre, en guide, on s'aperçoit que la présence des interfaces du guide fausse totalement l'acquisition de la signature de la cible et que la réponse fréquentielle monostatique dépend énormément de la position du transducteur. Ceci est dû aux interférences générées par la superposition des différents chemins multiples dans le guide.

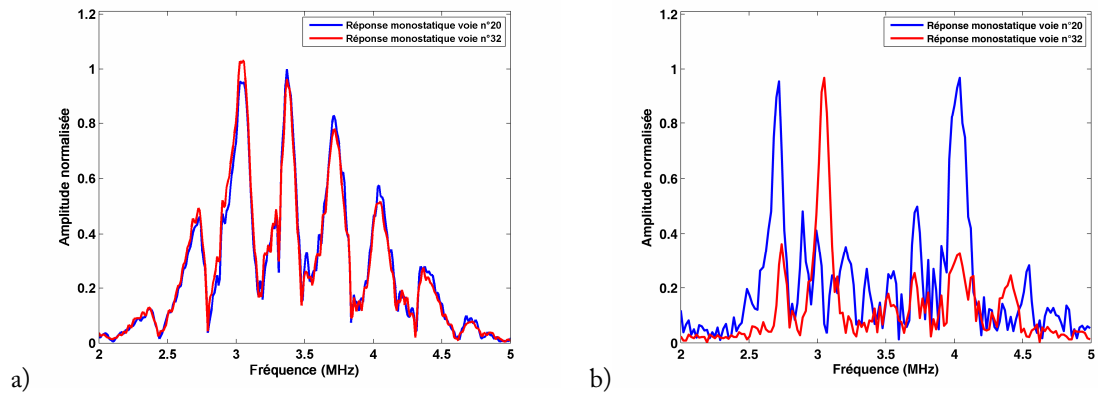


Fig.3.2 Réponses monostatiques d'une sphère en acier de 3 mm de diamètre pour deux transducteurs éloignés de 5 mm d'une même barrette a) en eau libre b) dans un guide d'onde de hauteur 28,1 mm à 575 mm de distance.

En 1987, Ingenito^[1] donna l'expression du champ acoustique diffusé par une sphère élastique dans un milieu stratifié en combinant décomposition en modes normaux du guide d'onde et en harmoniques sphériques de la cible. Dans Gaunard *et al.*, les auteurs utilisent la théorie des images pour calculer l'influence de la proximité d'une surface plane sur la fonction de forme d'une sphère élastique^[6]. Dans la suite, nous avons privilégié la méthode de décomposition en modes normaux car elle permet d'avoir des résultats plus généraux dans un guide d'onde, tout en étant plus simple du fait de l'orthonormalité des fonctions propres du guide. Cependant nous avons gardé à l'esprit les résultats démontrés par Gaunard *et al.*, ce qui nous a permis de confirmer nos résultats qui sont en adéquation avec des résultats obtenus à l'aide d'une autre méthode.

III.2. Cas d'un diffuseur ponctuel pseudo-isotrope

III.2.1. Théorie

L'analyse suivante est réalisée dans le domaine fréquentiel, ainsi pour simplifier l'écriture des formules, la dépendance fréquentielle reste implicite. Introduisons un vecteur \mathbf{h}_s de dimension N , où N est le nombre d'éléments de l'antenne. Le $i^{\text{ème}}$ élément de \mathbf{h}_s noté $[\mathbf{h}_s]_i$ est la fonction de Green entre le diffuseur à la position x_s et le transducteur indicé i à la position x_i . Grâce au principe de réciprocité, le vecteur décrivant la propagation de l'onde de l'antenne au diffuseur est donné par la transposée de \mathbf{h}_s notée \mathbf{h}_s' .

Considérons tout d'abord un diffuseur isotrope caractérisé par $S(0)$, son coefficient de diffusion. L'expression de la matrice des réponses inter-élément \mathbf{K} est :

$$\mathbf{K} = \mathbf{h}_s S(0) \mathbf{h}_s' \quad (3.1)$$

La matrice \mathbf{K} de dimension $N \times N$ est symétrique et son rang est égal à 1 par construction. Par définition, la décomposition en valeurs singulières (SVD) de \mathbf{K} s'écrit :

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^\dagger \quad (3.2)$$

Dans notre cas de figure, \mathbf{U} et \mathbf{V} sont deux matrices de rang 1, c'est-à-dire qu'elle ne possède qu'un vecteur colonne non nul et $\mathbf{\Sigma}$ est une matrice diagonale qui ne possède qu'un seul élément réel positif. La transposée hermitienne est notée † . Si on note Σ_1 l'unique valeur singulière supérieure à 0 de $\mathbf{\Sigma}$ et \mathbf{U}_1 et \mathbf{V}_1 les premiers vecteurs singuliers normalisés de \mathbf{U} et \mathbf{V} respectivement, l'Eq.(3.2) peut s'écrire :

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma}_1 \mathbf{V}_1^\dagger \quad (3.3)$$

Par identification de l'Eq.(3.1) avec l'Eq.(3.3), le premier vecteur singulier s'écrit $\frac{\mathbf{h}_s}{\|\mathbf{h}_s\|}$ et la première valeur singulière s'écrit $\Sigma_1 = |S(0)| \|\mathbf{h}_s\|^2$. On déduit de cette

expression que la valeur singulière dépend non seulement de la fonction de forme du diffuseur mais aussi du phénomène de propagation par l'intermédiaire de $\|\mathbf{h}_s\|$.

En utilisant le formalisme de la fonction de Green, la norme de \mathbf{h}_s est donnée par :

$$\|\mathbf{h}_s\|^2 = \sum_{i=1}^N |G(z_i, z_s, r_s - r_i)|^2 \quad (3.4)$$

Ici la fonction de Green ne dépend que de 3 variables de position car on se place dans un guide invariant par rotation autour de l'axe de l'antenne de réception. Ces 3 variables sont :

- la profondeur de la source z_i ,
- la profondeur du diffuseur z_s ,
- la distance azimutale entre le diffuseur et le réseau $R=r_s - r_i$ (figure 3.8).

Pour simplifier, on ne considère que le cas où la vitesse du son c_0 dans le guide est constante.

En supposant que l'antenne échantillonne suffisamment bien le champ acoustique sur toute la colonne d'eau, la somme discrète de l'Eq.(3.4) peut être remplacée par une intégrale continue comme suit :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}_s\|^2 &= \sum_{i=1}^N |G(z_i, z_s, r_s - r_i)|^2 \\ &\approx \frac{1}{\delta} \int_0^D |G(z, z_s, r_s - r_i)|^2 dz \end{aligned} \quad (3.5)$$

où δ est la distance entre les éléments de l'antenne et D est la profondeur du guide.

Comme présenté dans le chapitre II, le formalisme des modes normaux permet de décomposer la fonction de Green sur la base des modes normaux du guide d'onde, c'est-à-dire,

$$G(z, z_s, R) = \frac{i}{4\rho} \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m(z_s) \Psi_m(z) H_0^{(1)}(k_{rm} R) \quad (3.6)$$

où $\Psi_m(z)$ est le mode normal associé au $m^{\text{ième}}$ nombre d'onde transverse k_{zm} .

Lorsque la densité ρ du fluide est constante comme on le suppose ici (ρ ne dépend pas de z), le nombre d'onde radial k_{rm} est relié à k_0 le nombre d'onde intrinsèque du fluide et à k_{zm} par la relation $k_{rm} = \sqrt{k_0^2 - k_{zm}^2}$.

Quand on se place à quelques λ de la source, ce qui est toujours le cas en acoustique sous-marine, la fonction de Hankel du premier ordre $H_0^{(1)}$ peut être remplacée par son approximation asymptotique, et l'expression de la fonction de Green devient :

$$G(z, z_s, R) \approx \frac{i}{\rho \sqrt{8\pi R}} e^{-i\pi/4} \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m(z_s) \Psi_m(z) \frac{e^{ik_{rm}R}}{\sqrt{k_{rm}}} \quad (3.7)$$

Il est important de passer en revue les approximations qui ont été faites jusque là :

- guide invariant par rotation autour de l'axe de l'antenne (symétrie cylindrique) ;
- cible à au moins quelques λ de l'antenne ;
- antenne échantillonnant la totalité du champ acoustique sur toute la colonne d'eau de façon suffisamment fine.

Grâce à la dernière proposition, nous allons pouvoir profiter de l'orthonormalité des modes propres $\Psi_m(z)$ du guide.

Pour pouvoir donner une solution analytique du problème, nous nous sommes restreints au cas du guide d'onde de Pekeris que nous avons étudié dans le chapitre II.

Dans un guide d'onde de Pekeris, la différence d'impédance entre l'eau et le fond est finie. Nous avons montré que k_{rm} est purement réel seulement quand l'angle de propagation θ_m associé au mode m ($\cos(\theta_m) = k_{rm}/k_0$) est plus petit que l'angle critique (ou angle de Brewster), θ_b [$\cos(\theta_b) = c_0/c_b$] où k_b est le nombre d'onde dans le fond et k_0 est le nombre d'onde dans l'eau. En d'autres termes, lorsque k_{rm} est compris entre k_b et k_0 , le mode se propage sans atténuation autre que géométrique. Pour $\theta_m > \theta_b$, une partie de l'énergie des modes fuit dans le fond et ceux-ci diminuent exponentiellement avec la distance^[13]. Par conséquent, lorsque l'on considère un dispositif expérimental où la distance R est grande devant la longueur d'onde, la contribution des modes de nombre d'onde complexe au niveau de l'antenne est négligeable.

De plus, en toute rigueur, les transducteurs ne sont pas ponctuels et de ce fait possèdent un angle de directivité noté θ_d . En conséquence, le réseau de transducteurs n'est pas sensible aux modes dont le nombre d'onde est tel que $\theta_d < \theta_m$.

En définitive, en champ lointain, seuls les modes vérifiant la condition $\theta_m < \theta_{max}$ [$\theta_{max} = \min(\theta_d, \theta_b)$] contribuent au champ enregistré par l'antenne. La fonction de Green est donc correctement approximée en remplaçant la somme infinie par une somme finie avec un index maximum égal à $M-1$ où $M-1$ est tel que $k_{rM-1} = k_0 \cos(\theta_{max})$.

En utilisant les Eqs.(3.5) et (3.7) et la relation d'orthogonalité et de fermeture entre les modes normaux, la norme de \mathbf{h}_s est donnée par :

$$\|\mathbf{h}_s\|^2 = \frac{1}{\delta \rho 8 \pi R} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m^2(z_s)}{k_{rm}} \quad (3.8)$$

Ainsi à partir de cette dernière équation, on peut déduire la valeur singulière d'un diffuseur ponctuel :

$$\Sigma_1 = \frac{|S(0)|}{\rho 8 \pi R k_0 \delta} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m^2(z_s)}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_m)}} \quad (3.9)$$

où k_0 est le nombre d'onde intrinsèque et $\sin(\theta_m) = k_{zm} / k_0$.

Dans le cas d'un guide d'onde de Pekeris, une bonne approximation des modes normaux est donnée par ^[13]:

$$\Psi_m(z) = \sqrt{\frac{2\rho}{D}} \sin(k_{zm}z) \quad \text{et} \quad k_{zm} = \frac{\pi}{2D} + \frac{m\pi}{D}$$

En remplaçant $\Psi_m(z)$ par son expression dans l'Eq.(3.9), on obtient

$$\Sigma_1 = \frac{|S(0)|}{4\pi R D k_0 \delta} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\sin^2(k_{zm}z_s)}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_m)}} \quad (3.10)$$

Dans la plupart des expériences, l'approximation des petits angles est justifiée, c'est-à-dire que θ_{max} est petit et comme $\theta_m < \theta_{max}$, on peut faire un développement en série du terme au dénominateur :

$$\Sigma_1 = \frac{|S(0)|}{4\pi R D k_0 \delta} \sum_{m=0}^{M-1} \sin^2(k_{zm} z_s) \left(1 + \frac{\sin^2(\theta_m)}{2} + \dots\right) \quad (3.11)$$

En ne gardant que le premier terme du développement, Σ_1 est bien approximé par :

$$\Sigma_1 \approx \frac{|S(0)|}{4\pi R D k_0 \delta} \sum_{m=0}^{M-1} \sin^2(k_{zm} z_s) \quad (3.12)$$

De l'expression de k_{zm} , on peut déduire que (annexe A) :

$$\Sigma_1 \approx \frac{|S(0)|}{4\pi R D k_0 \delta} \frac{M}{2} \left(1 - \frac{1}{M} f_M\left(\frac{z_s}{D}\right)\right) \quad (3.13)$$

où $f_M(\xi) = \cos(\pi M \xi) \frac{\sin(\pi M \xi)}{\sin(\pi \xi)}$.

La fonction f_M est maximale en $\xi = 0$ [$f_M(0) = M$] et minimale en $\xi = 1$ [$f_M(1) = -M$]. Entre ces 2 extrema, la fonction est proche de 0. La largeur caractéristique $\delta\xi$ associée aux 2 extrema est égale à $1/M$.

L'expression de Σ_1 nous renseigne sur plusieurs points :

- premièrement, quand la cible est loin des interfaces, le second terme dans l'Eq.(13) est négligeable et ainsi Σ_1 est constant avec la profondeur et égal à $|S(0)|M / (8\pi k_0 R D \delta)$. Si on prend en compte le fait que³ $M = 2\sin(\theta_{max})D / \lambda$, la distance minimale entre la cible et une interface peut s'écrire $\Lambda = \lambda / 2\sin(\theta_{max})$ et comme θ_{max} dépend faiblement de la fréquence, la seule dépendance fréquentielle de Σ_1 provient de $|S(0)|$. Il est intéressant de noter que ce résultat peut être généralisé à d'autres types de

³ Cette expression du nombre de modes maximum vient de l'expression 2.33 de la fréquence de coupure du chapitre II.

guide d'onde pourvu que k_{zm} soit proportionnel à m dans une certaine limite, approximation souvent réaliste lorsque m est grand.

- deuxièmement, quand la cible est proche de la surface, Σ_1 décroît jusqu'à devenir nulle. En effet, à cause de la condition de Dirichlet à la surface, le champ de pression est nul quand z_s tend vers 0 et la cible est invisible. Au contraire, près du fond, le champ de pression est maximum et la valeur singulière est le double de sa valeur au milieu du guide.

Cette formulation analytique de la première valeur singulière est en accord avec les résultats expérimentaux présentés par Mordant *et al.* ^[21]. En effet, dans cet article, les auteurs ont appliqué la méthode DORT à la détection d'un fil de nylon de 0,2 mm de diamètre dans un guide d'onde. L'expérience a été faite avec une barrette de 60 transducteurs dont la fréquence centrale est 1,5 MHz et une distance inter-élément de 0,58 mm. Le guide d'onde est délimité par une interface eau/air et une interface eau/acier au fond. La profondeur du guide est de 35 mm et la distance entre la barrette et la cible est de 400 mm. Le fil se déplace dans la colonne d'eau de façon à échantillonner finement toutes les positions z_s et la première valeur singulière est tracée en fonction de la profondeur.

Mordant *et al.* ont proposé un modèle numérique utilisant les images virtuelles du réseau par rapport aux interfaces. Les résultats expérimentaux trouvés alors correspondent bien aux simulations lorsqu'on considère seulement les 11 premières réflexions. Pour un tel nombre de réflexions, l'Eq.(3.27) donne un maximum de 32 modes. Sur la figure 3.3, la première valeur singulière donnée par l'Eq.(3.13) est tracée pour $M = 32$. L'accord entre la théorie et la valeur expérimentale est excellent.

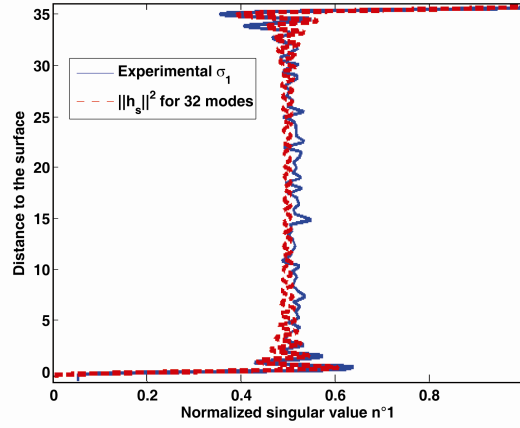


Fig.3.3 Amplitude de la première valeur singulière du fil en fonction de la distance à la surface comparée à $\|\mathbf{h}_s\|^2$. La courbe en trait continu représente les résultats expérimentaux obtenus par Mordant *et al.* et la courbe en pointillés correspond à la théorie.

III.3. Cas de 2 diffuseurs ponctuels pseudo-isotropes

Considérons le cas de 2 diffuseurs ponctuels pseudo-isotropes. En négligeant la diffusion multiple, la matrice de réponse peut être écrite comme la somme des matrices des réponses de chaque diffuseur seul¹⁴ :

$$\mathbf{K} = \mathbf{h}_{s1} S_1(0)^t \mathbf{h}_{s1} + \mathbf{h}_{s2} S_2(0)^t \mathbf{h}_{s2} \quad (3.14)$$

où $\{\mathbf{h}_{s1}\}_i = G(z_{s1}, z_i, r_{s1} - r_i)$ et $\{\mathbf{h}_{s2}\}_i = G(z_{s2}, z_i, r_{s2} - r_i)$.

L'expression de \mathbf{K} suivant l'Eq.(3.14) ne va nous permettre de déduire facilement la décomposition en valeurs singulières de \mathbf{K} que si l'orthogonalité des vecteurs \mathbf{h}_{s1} et \mathbf{h}_{s2} est avérée. En effet, si on veut pouvoir écrire que \mathbf{U}_1 premier vecteur singulier de \mathbf{K} est égal à \mathbf{h}_{s1} et \mathbf{U}_2 deuxième vecteur singulier de \mathbf{K} est égal à \mathbf{h}_{s2} , par définition de la SVD, les deux vecteurs doivent être orthogonaux et non dégénérés. Le couplage entre les deux diffuseurs est donné par le produit scalaire $\mathbf{h}_{s2}^\dagger \mathbf{h}_{s1}$ et celui-ci peut être calculé en utilisant

la décomposition modale en ne considérant que les modes se propageant dans le guide à l'exclusion des modes évanescents:

$$\mathbf{h}_{s2}^\dagger \mathbf{h}_{s1} = \frac{1}{8\pi\rho R\delta} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_{s1})\Psi_m(z_{s2})}{k_{rm}} e^{ik_{rm}(R_1-R_2)} \quad (3.15)$$

Ici, par soucis de simplicité, nous faisons l'hypothèse que les cibles sont à la même distance ($R_1 = R_2$). De plus, en se plaçant dans l'approximation « petits angles », soit $k_{rm} \simeq k_0$, l'Eq.(3.15) s'écrit:

$$\mathbf{h}_{s2}^\dagger \mathbf{h}_{s1} \approx \frac{1}{8\pi\rho Rk_0\delta} \sum_{m=0}^{M-1} \Psi_m(z_{s1})\Psi_m(z_{s2}) \quad (3.16)$$

Encore une fois, on se place dans le cas du guide d'onde de Pekeris. Le produit scalaire devient alors :

$$\mathbf{h}_{s2}^\dagger \mathbf{h}_{s1} \approx \frac{1}{4\pi R D k_0 \delta} \sum_{m=0}^{M-1} \sin(k_{zm} z_{s1}) \sin(k_{zm} z_{s2}) \quad (3.17)$$

que l'on transforme en utilisant une relation trigonométrique bien connue en :

$$\mathbf{h}_{s2}^\dagger \mathbf{h}_{s1} \approx \frac{1}{8\pi R D k_0 \delta} \sum_{m=0}^{M-1} [\cos(k_{zm} [z_{s1} - z_{s2}]) - \cos(k_{zm} [z_{s1} + z_{s2}])] \quad (3.18)$$

La somme des cosinus est calculée comme dans l'annexe A. :

$$\mathbf{h}_{s2}^\dagger \mathbf{h}_{s1} \approx \frac{1}{8\pi R k_0 \delta} \left[f_M\left(\frac{z_1 + z_2}{2D}\right) - f_M\left(\frac{z_1 - z_2}{2D}\right) \right] \quad (3.19)$$

Ainsi, loin des interfaces, le couplage entre les deux cibles peut être négligé tant que $|z_2 - z_1| > D/M$. Et là encore, $M \sim 2\sin(\theta_{max})D/\lambda$ d'où $|z_2 - z_1| > \Lambda$. Cette expression est en accord avec le critère de Rayleigh lorsque l'on prend en compte une ouverture angulaire égale à $2\theta_{max}$. Néanmoins, l'approche modale est plus générale car elle reste valide près des interfaces.

III.4. Cas d'un diffuseur axisymétrique étendu ($2a > \lambda R/D$)

III.4.1. Géométrie du problème

Les notations utilisées dans cette section sont introduites sur la Fig.3.4.

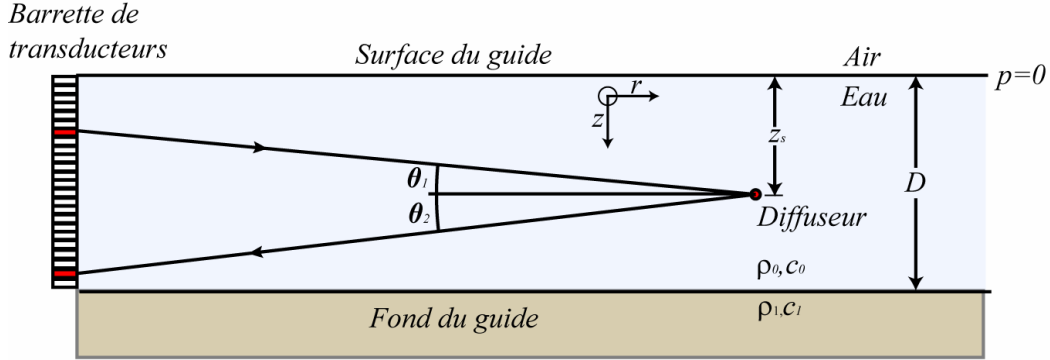


Fig.3.4 Disposition et paramètres du guide d'onde.

III.4.2. Analyse et théorie

Un diffuseur étendu est caractérisé par une fonction de forme, ou signature fréquentielle S , dépendant de l'angle d'arrivée de l'onde sur le diffuseur θ_1 et de l'angle de diffusion θ_2 . Pour un diffuseur axisymétrique et à une fréquence donnée, la fonction de forme est une fonction paire ne dépendant que de la différence entre ces deux angles. Plaçons-nous dans l'approximation des petits angles, on peut alors écrire le développement en série de Taylor au second ordre de S :

$$S(\theta_2 - \theta_1) = \left(S(0) + \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{2} S''(0) \right) \quad (3.20)$$

On introduit les opérateurs bilinéaires de dérivation suivants ∂_z^L et ∂_z^R de telle sorte que $\partial_z^L(\varphi, \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \psi$ et $\partial_z^R(\varphi, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial z} \varphi$.

Une onde plane est écrite $\varphi_\theta(r, z) = \exp[-ik_0(\sin\theta.z + \cos\theta.r)]$ où k_0 est le nombre d'onde, r la distance azimutale, z la hauteur de la cible. Pour 2 ondes planes φ_{θ_1} et φ_{θ_2} dans l'approximation des petits angles, on a :

$$\partial_z^L(\varphi_{\theta_1}, \varphi_{\theta_2}) = -ik_0 \sin\theta_1 \varphi_{\theta_1} \varphi_{\theta_2} \approx -ik_0 \theta_1 \varphi_{\theta_1} \varphi_{\theta_2}$$

et de façon similaire :

$$\partial_z^R(\varphi_{\theta_1}, \varphi_{\theta_2}) \approx -ik_0 \theta_2 \varphi_{\theta_1} \varphi_{\theta_2}.$$

Par conséquent, l'Eq.(3.20) peut être exprimée en terme de φ_{θ_1} , φ_{θ_2} au lieu de θ_1, θ_2

$$S(\theta_2 - \theta_1) = \left[S(0) \varphi_{\theta_1} \varphi_{\theta_2} \right]_{z,r=0} - \left[S''(0) \frac{(\partial_z^L - \partial_z^R)^2}{2k_0^2} (\varphi_{\theta_1}, \varphi_{\theta_2}) \right]_{z,r=0} \quad (3.21)$$

Comme cette approximation est valide pour toute paire d'ondes planes dont l'angle de propagation est petit, elle peut être généralisée à toute paire de champ satisfaisant l'approximation paraxiale. Donc, en supposant que la fonction de Green \mathbf{h}_s décrivant la propagation allant d'un des transducteurs de la barrette vers le centre du diffuseur satisfait l'approximation parabolique, la matrice des réponses impulsionnelles inter-élément peut s'écrire

$$\mathbf{K} = S(0) \mathbf{h}_s \mathbf{h}_s' + \frac{S''(0)}{k_0^2} \partial_z \mathbf{h}_s \partial_z \mathbf{h}_s' - \frac{S''(0)}{2k_0^2} \left[\mathbf{h}_s (\partial_z^2 \mathbf{h}_s') + (\partial_z^2 \mathbf{h}_s) \mathbf{h}_s' \right] \quad (3.22)$$

Lorsque la cible possède une réponse isotrope, S est constant en fonction de $(\theta_2 - \theta_1)$ et le premier vecteur singulier est donnée par $\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_s / \|\mathbf{h}_s\|$ avec comme valeur singulière $\sigma_1 = S(0) \|\mathbf{h}_s\|^2$. Pour un diffuseur étendu, cela est toujours vrai à l'ordre 0. La première valeur singulière est égale à $S(0) \|\mathbf{h}_s\|^2$, plus un terme d'ordre supérieur en $S''(0)$.

De plus, si on considère que $\mathbf{h}_s^\dagger \cdot \partial_z \mathbf{h}_s \approx 0$, $\partial_z^2 \mathbf{h}_s^\dagger \cdot \partial_z \mathbf{h}_s \approx 0$ et $\|\mathbf{h}_s\| \gg \|\partial_z^2 \mathbf{h}_s\| / k_0^2$ (approximation paraxiale), le deuxième vecteur singulier est donné par $\mathbf{V}_2 = \partial_z \mathbf{h}_s / \|\partial_z \mathbf{h}_s\|$ avec comme valeur singulière $\Sigma_2 = S''(0) \|\partial_z \mathbf{h}\|^2 / k_0^2$.

En résumé, les 2 premières valeurs singulières dans le guide d'onde sont simplement reliées à la fonction de forme rétrodiffusée $S(0)$ et sa dérivée seconde $S''(0)$ si et seulement si le produit scalaire

$$\Gamma = \frac{\mathbf{h}_s^\dagger \cdot \partial_z \mathbf{h}_s}{\|\mathbf{h}_s\| \cdot \|\partial_z \mathbf{h}_s\|} \quad (3.23)$$

est petit par rapport à 1.

L'expression analytique de Γ est donnée dans l'annexe B. Le terme de couplage Γ est tracé en fonction de la profondeur du diffuseur sur la figure 3.5. On note que le couplage est maximum au niveau des interfaces (proche de 1) et décroît et atteint son minimum (environ 2%) quand la cible s'éloigne des bords d'une distance donnée par Λ . Ces résultats sont cohérents avec l'étude faite par Gaunard *et al.* pour une sphère près d'une interface plane satisfaisant les conditions de Neumann^[6]. On peut utiliser la méthode des images pour expliquer ce phénomène de manière qualitative. En effet, au niveau de la surface de l'eau, du fait de la condition de Dirichlet imposée à l'interface entre l'eau et l'air, la cible et son image sont de signes opposés. Lorsqu'elles se rapprochent, le mode dipolaire dont le projeté sur le réseau est symétrique s'associe à son image pour former un dipôle dont le projeté sur le réseau est anti-symétrique. Le dipôle dont le projeté sur le réseau est anti-symétrique reste quant à lui anti-symétrique (figure 3.6a). Lors de la décomposition en valeurs singulières, l'orthogonalité des deux modes n'est plus aussi nette qu'au centre du guide, les vecteurs singuliers associés sont couplés (ainsi que les valeurs singulières) et les termes de l'Eq.(3.22) ne peuvent plus être séparés simplement. Au niveau du fond, cette fois-ci, le coefficient de réflexion à la surface est positif (+1 si on considère une interface parfaitement réfléchissante), c'est le dipôle anti-symétrique qui devient symétrique. Le couplage entre la fonction de Green et sa dérivée augmente donc lorsqu'on se rapproche du fond jusqu'au moment où les lobes de signes

différents se superpose et la dérivée de la fonction de green s'annule. C'est bien le comportement qu'on observe sur la courbe de Γ .

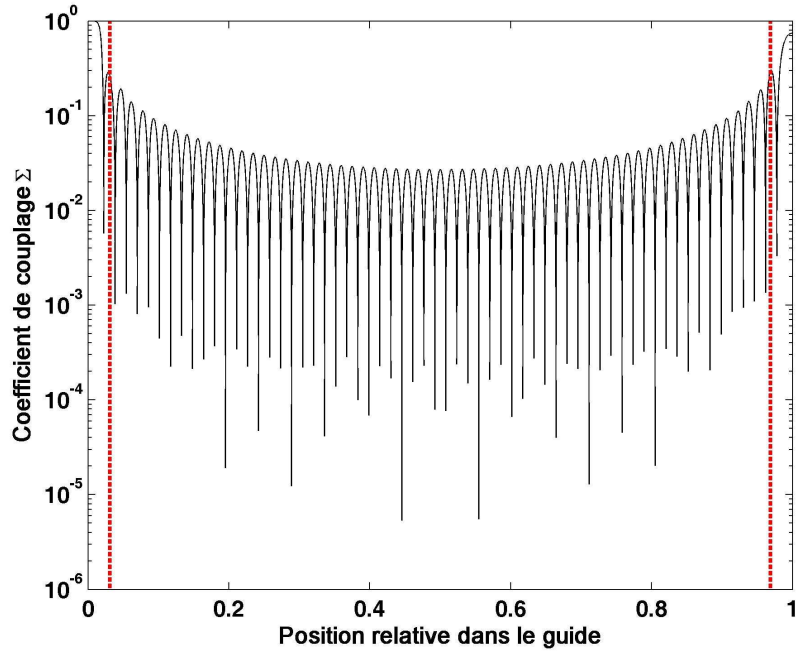


Fig.3.5 Coefficient de couplage Γ entre les deux premières valeurs singulières en fonction de la position relative de la cible dans le guide. Le couplage est maximum à proximité de la surface et du fond (proche de 1) et minimum au centre du guide (environ 2%). En 0 et en 1, la fonction de Green et sa dérivée s'annulent respectivement, Γ n'est pas défini. La distance Λ aux interfaces est indiquée en pointillés rouges, dès que l'on dépasse Λ , le terme de couplage passe à 20%.

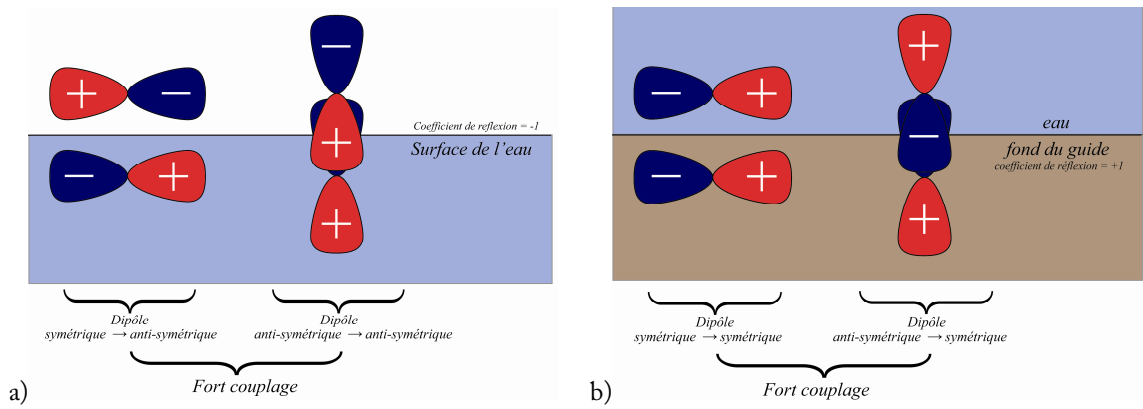


Fig.3.6 Schéma d'interprétation du coefficient de couplage a) au niveau de la surface de l'eau b) au niveau du fond. On voit qu'au niveau de la surface le dipôle ayant une projection sur le réseau symétrique apparaît maintenant pour le réseau comme un dipôle anti-symétrique. Le dipôle anti-symétrique restant anti-symétrique le couplage augmente lorsqu'on se rapproche de la surface. Un phénomène similaire opposé apparaît au niveau du fond.

Maintenant, il est intéressant de comparer les valeurs singulières obtenues avec et sans guide d'onde. En espace libre, la première valeur singulière est aisément calculée :

$$\Sigma_1^{libre} = S(0) \|\mathbf{h}_{libre}\|^2 \quad (3.24)$$

Avec l'Eq.(3.5) et $G(z, z_s, r_s - r_i) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R}$, la première valeur singulière en espace libre devient :

$$\Sigma_1^{libre} = \frac{S(0)D}{\delta(4\pi R)^2} \quad (3.25)$$

où D est l'ouverture de la barrette et δ est la distance inter-élément.

De la même façon, la seconde valeur singulière est donnée par :

$$\Sigma_2^{libre} = \frac{S''(0) \|\partial_z \mathbf{h}_{libre}\|^2}{k_0^2} \approx \frac{S''(0)D^3}{48\delta R^4 \lambda^2 k_0^2} \quad (3.26)$$

Il a été montré dans la section 2 que dans un guide d'onde, on a :

$$\Sigma_1^{guide} = \frac{|S(0)|M}{8\pi R k_0 D \delta} \text{ et } \Sigma_2^{guide} = \frac{S''(0) \|\partial_z \mathbf{h}_{guide}\|^2}{k_0^2}$$

Par conséquent,

$$\frac{\Sigma_1^{guide}}{\Sigma_1^{libre}} = \frac{|S(0)|M}{8\pi Rk_0 D\delta} \times \frac{\delta(4\pi R)^2}{|S(0)|D}$$

avec

$$M = \frac{N_{reflex} D^2}{\lambda R} \quad (3.27)$$

Le rapport des valeurs singulières devient $\frac{\Sigma_1^{guide}}{\Sigma_1^{libre}} = N_{reflex}$

En ne gardant que le terme en M^3 , l'Eq. (B6) donnée en annexe devient :

$$\Sigma_2^{guide} = \frac{S''(0)M^3\lambda}{48\delta R D^3 k_0^2} = \frac{S''(0)(2\sin\theta_d)^3}{48\delta R k_0^2 \lambda^2} \quad (3.28)$$

avec $M = \frac{2\sin\theta_d D}{\lambda}$

$$\frac{\Sigma_2^{guide}}{\Sigma_2^{libre}} = \frac{(2\sin\theta_d)^3 R^3}{D^3} = N_{reflex}^3 \quad (3.29)$$

Il en ressort que le guide d'onde améliore le niveau de la première valeur singulière d'un facteur de $2R\sin(\theta_{max})/D$ qui est le nombre de réflexions sur les interfaces pris en compte dans le calcul DORT alors que le facteur d'amélioration du niveau de la seconde valeur singulière atteint $(2R\sin(\theta_{max})/D)^3$.

Ce résultat montre que la seconde valeur singulière peut être un bon paramètre supplémentaire pour l'identification d'une cible dans un guide.

III.4.3. Résultats expérimentaux

4.3.1. Paramètres expérimentaux et résultats

Toutes les expériences présentées dans ce chapitre ont été réalisées en cuve. Les données ont été obtenues avec une barrette de 64 éléments fonctionnant à une fréquence centrale de 3,5 MHz ($\lambda = 0.43$ mm) avec une bande passante de 1,5 MHz. La distance

inter-élément est $\delta = 0,417$ mm, l'ouverture de la barrette est donc de 26,7 mm. Les interfaces du guide d'onde sont à la surface une interface eau/air et au fond une interface eau/plexiglas et la hauteur du guide est $D = 28,1$ mm (65λ). La largeur du guide est de 60 cm ce qui est suffisant pour considérer qu'il n'y a aucunes réflexions latérales. La distance entre la barrette et la cible est $R = 575$ mm, *i.e.*, 1340λ . (cf figure 3.5)

Ces expériences à petite échelle donnent une bonne idée des phénomènes se déroulant lors d'une expérience en mer. Pour une antenne verticale travaillant à 12,5 kHz, le guide d'onde équivalent serait long de 160 m et d'une profondeur de 8 m.

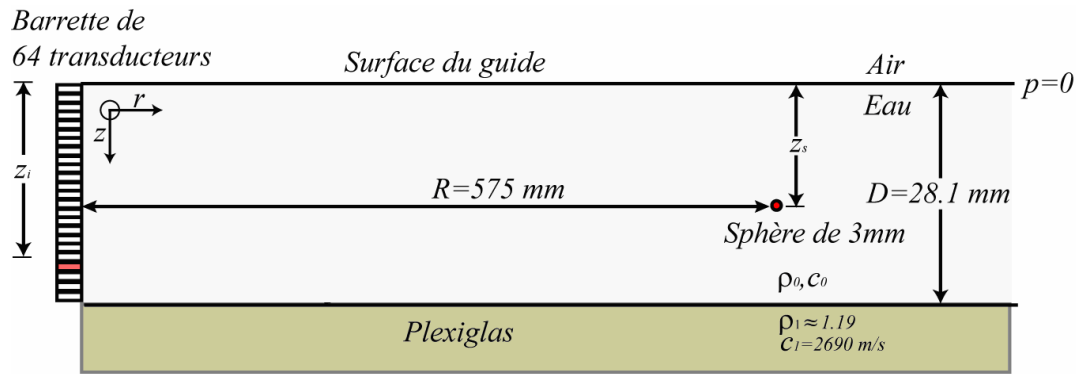


Fig.3.7 Disposition et paramètres du guide d'onde.

4.3.2. Fonction de forme et valeurs singulières

Le diffuseur étendu est une sphère de 3 mm de diamètre dans un guide d'onde à une profondeur de 13 mm. Les trois premières valeurs singulières obtenues dans le guide d'onde en fonction de la fréquence sont tracées sur la figure 3.8. Ces courbes sont comparées aux courbes théoriques obtenues en eau libre^[12] en prenant en compte l'antenne virtuelle correspondante aux nombre de réflexions que l'on considère. Pour la simulation, la taille de l'antenne virtuelle, D' , est choisie de telle manière que $D' = 2R \sin(\theta_{\max})$ avec $\theta_{\max} = 20^\circ$ correspondant à une ouverture virtuelle 7 fois plus grande que l'ouverture réelle de l'antenne. Ces résultats expérimentaux collent presque

parfaitement à la théorie sur les deux premières valeurs singulières, la troisième valeur singulière étant en dessous du niveau du bruit.

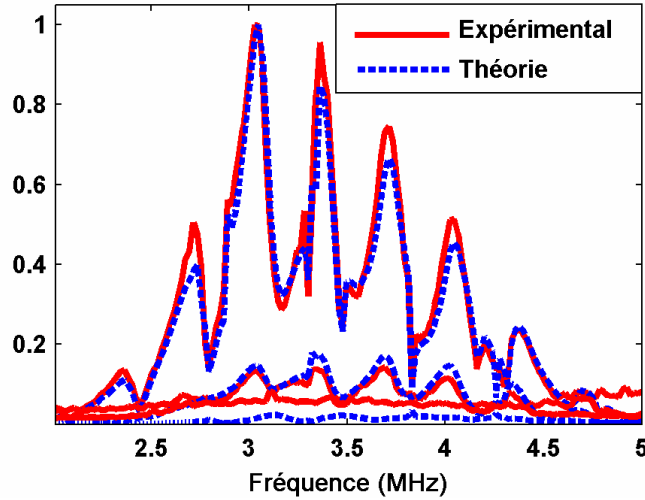


Fig.3.8 Valeurs singulières expérimentales et théoriques pour le cas d'une sphère en acier de 3 mm de diamètre.

Ces résultats prouvent que la méthode DORT permet d'extraire la signature rétrodiffusée et sa dérivée seconde sans distorsion fréquentielle. De plus, le guide d'onde, par un effet d'ouverture virtuelle, augmente le niveau des valeurs singulières, permettant ainsi une meilleure caractérisation dans un environnement bruyant. Cet effet est particulièrement important avec la seconde valeur singulière qui est proportionnelle à $\sin^3(\theta_{\max})$. Les vecteurs singuliers temporels reconstruits correspondants aux deux premières valeurs singulières de la sphère sont représentés sur la figure 3.9. On constate que les fronts les plus marqués dans l'invariant temporel sont le front direct pour la première valeur singulière et les fronts correspondants aux chemins ayant subis une réflexion sur les interfaces pour la deuxième valeur singulière.

Les deux premiers vecteurs singuliers sont repropagés numériquement grâce au code numérique RAM (Range-dependant Acoustic Model) basé sur l'approximation parabolique de l'équation de propagation^[20]. Pour ce faire, la configuration RAM prend en compte la géométrie du guide, notamment une faible pente du fond de $0,4^\circ$. A une fréquence donnée, le vecteur propre expérimental est conjugué et chaque élément du

vecteur est utilisé comme la phase et l'amplitude d'excitation pour l'élément de l'antenne simulé. Après propagation numérique, la carte du champ de pression acoustique est stockée dans la mémoire de l'ordinateur. La simulation est répétée pour plusieurs fréquences entre 2 et 5 MHz. Le champ moyenné en fréquence autour de la cible est présenté sur la figure 3.10 en échelle logarithmique ainsi que les parties imaginaires et réelles du champ. Cette représentation n'est pas conventionnelle mais permet facilement de mettre en évidence les caractères symétriques et anti-symétriques des champs acoustiques repropagés.

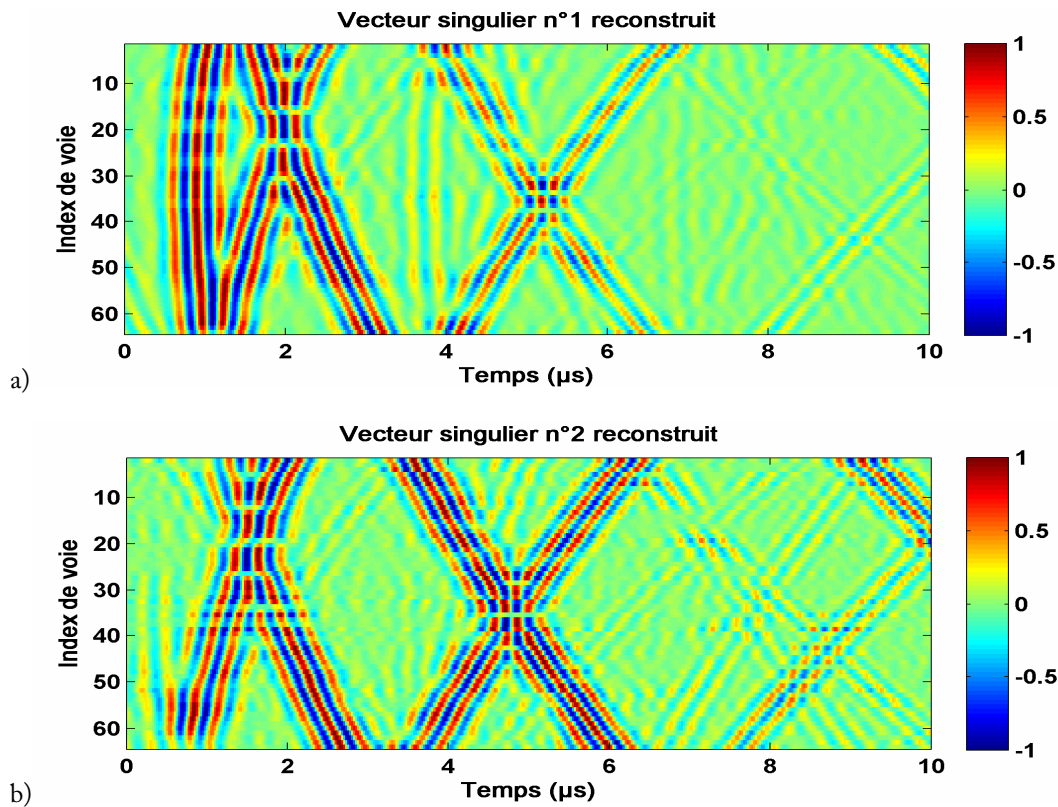


Fig.3.9 Vecteurs singuliers temporels reconstruits associés aux deux valeurs singulières de la sphère. Ces deux figures montrent que la première valeur singulière est associée à un moment à caractère monopolaire alors que la seconde valeur singulière est associée à un moment dipolaire.

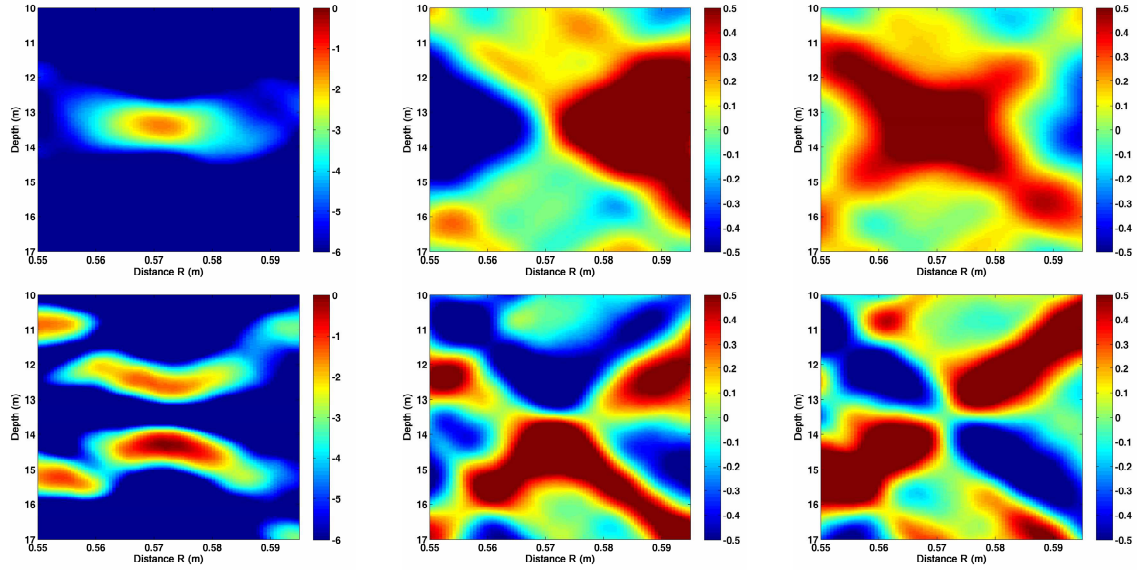


Fig.3.10 Forme des tâches de focalisation après repropagation des deux premiers vecteurs singuliers de la sphère grâce au modèle numérique R.A.M. On a tracé ici respectivement l'énergie moyenne, la partie imaginaire et la partie réelle du champ repropagé.

Comme en eau libre, le premier et le second vecteur donne une tâche de focalisation respectivement symétrique et anti-symétrique. Cependant, cela est seulement vrai dans le voisinage immédiat de la cible car à la différence d'une configuration en eau libre, loin du point focal, la tâche de focalisation perd sa symétrie à cause des interactions avec les interfaces du guide. La tâche focale mesure 1,4 mm de large, on peut donc en déduire que l'ouverture virtuelle obtenue grâce aux réflexions sur les interfaces du guide est au moins 6 fois plus grande que l'ouverture réelle. Ceci est en accord avec l'ouverture virtuelle $D' = 197$ mm introduite précédemment.

4.3.3. Séparation de 2 sphères élastiques

L'expérience suivante illustre simultanément les deux aspects prédominants de la méthode DORT : la détection de deux cibles à la même distance et l'extraction de leur fonction de forme. L'expérience est réalisée dans un guide de 40 mm avec cette fois-ci deux sphères en acier dont les diamètres diffèrent de 5%. Cette différence de rayon induit une différence dans les valeurs des fréquences de résonance de 5%. La distance entre les deux sphères est de 10 mm ce qui est largement plus que $D/\sin(\theta_{\max})$, de telle

sorte que, d'après les résultats présentés dans la section 2, les deux sphères interagissent faiblement.

Les quatre premières valeurs propres sont tracées en fonction de la fréquence sur la Fig.3.11.

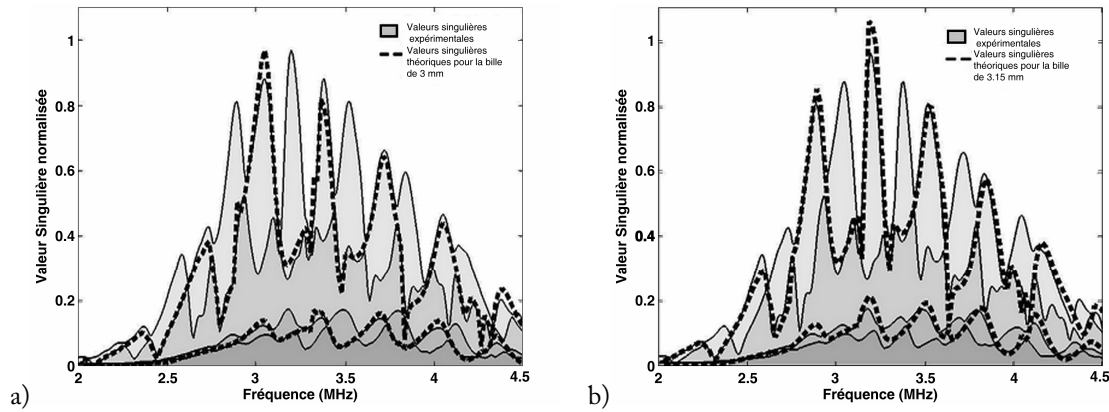


Fig.3.11 Deux sphères différentes dans un guide d'onde : comparaison entre les quatre premières valeurs singulières expérimentales et les deux premières valeurs singulières théoriques (a) de la sphère en acier de 3 mm et (b) de la sphère en acier de 3.15 mm.

Il n'y a pas de façon simple pour associer une valeur propre à la cible correspondante, en particulier, la première valeur singulière peut ne pas correspondre à la même cible pour toutes les fréquences. Une cible peut avoir la plus grande réflectivité à une fréquence (par exemple à une fréquence de résonance) alors que l'autre cible à la plus grande réflectivité à une autre. Nous avons choisi des sphères de diamètres différents justement pour mettre en évidence ce phénomène. En effet, dans la configuration présentée le fait que les diamètres diffèrent de 5% translate leur fréquence de résonance dans les mêmes proportions et on peut voir de nombreux croisements de valeurs singulières. Selon la fréquence considérée, la cible correspondant à la première valeur singulière peut-être soit la sphère de 3 mm soit la sphère de 3,15 mm. Lorsque nous faisons la moyenne sur toutes les fréquences pour tracer le champ acoustique en fonction de la distance comme sur les figures 3.12 et 3.14, nous perdons la capacité de séparer les deux cibles avec la méthode DORT. Si les fonctions de forme théoriques

respectives des cibles sont connues alors les deux fonctions de forme rétrodiffusées peuvent être réassignées aux sphères correspondantes en comparant la valeur singulière avec chaque valeur singulière théorique prise seule comme sur la figure 3.11. En effet comme nous l'avons démontré dans la section 2, pour deux diffuseurs distants, une valeur singulière est associée à chaque diffuseur. S'il n'y a pas de phénomène de multidiffusion, chaque valeur singulière est la même que si l'expérience avait été réalisée avec un seul diffuseur. Un effet similaire se produit pour les deux valeurs singulières suivantes. Ceci peut-être utile dans le cas où on cherche à reconstruire les vecteurs propres temporels comme nous l'avons présenté dans le chapitre I car une condition nécessaire à la reconstruction du bon vecteur propre temporel est évidemment que les vecteurs propres monochromatiques utilisés soient tous associés au même diffuseur.

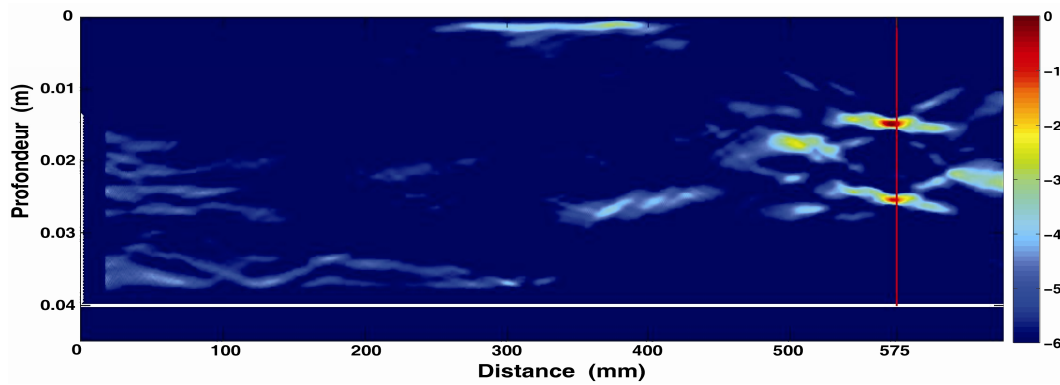


Fig.3.12 Repropagation avec le code numérique R.A.M du premier vecteur singulier en fonction de la distance. Le champ est moyenné sur toutes les fréquences.

Si le but de l'expérience est uniquement de caractériser les cibles alors il faut tracer la repropagation des vecteurs propres monochromatiques en fonction de la profondeur et de la fréquence comme présenté sur la figure 3.13. Le champ repropagé associé à la première valeur singulière focalise à la profondeur de la sphère possédant la plus haute fonction de forme rétrodiffusée pour la fréquence donnée. Le second vecteur singulier focalise sur l'autre sphère. Le même phénomène apparaît sur la figure 3.15 quand on repropage le troisième vecteur singulier, le point focal dipolaire est centré sur la cible la plus écho-gène à cette fréquence. Nous avons mis en évidence ces changements de

position d'une sphère à l'autre sur les figures 3.13a et 3.15a en traçant des lignes verticales noires. Celles-ci correspondent aux croisements de valeurs singulières ce qui va nous permettre de reconstruire la dépendance fréquentielle de la fonction de forme rétrodiffusée grâce à la repropagation des vecteurs singuliers.

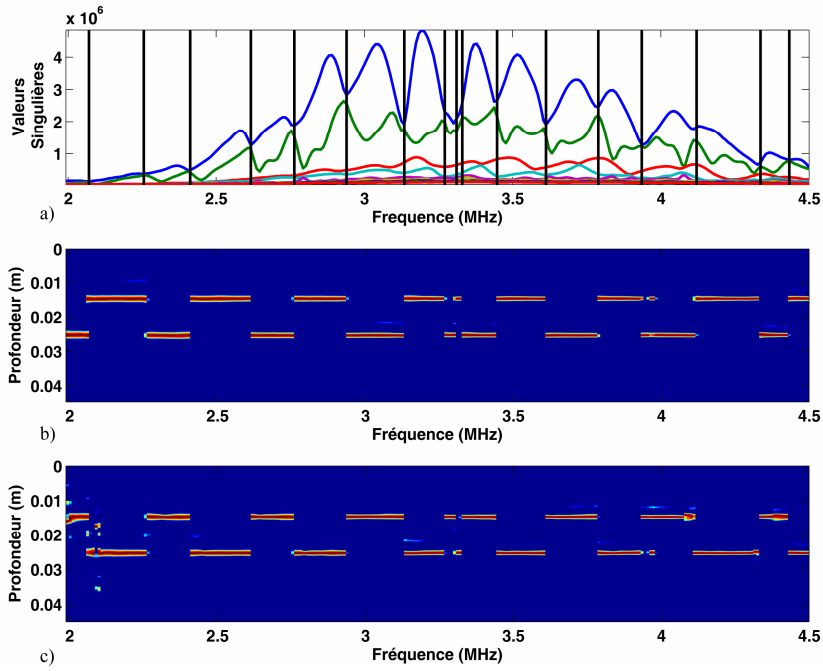


Fig.3.13 a) Valeurs singulières mesurées pour les deux sphères en fonction de la fréquence. Une ligne verticale désigne une fréquence où les deux sphères possèdent la même réflectivité et donc un croisement a lieu. b) Repropagation avec le code numérique R.A.M du premier vecteur singulier en fonction de la fréquence et de la profondeur à la distance $R= 575$ mm. c) Repropagation avec le code numérique R.A.M du deuxième vecteur singulier à la même distance.

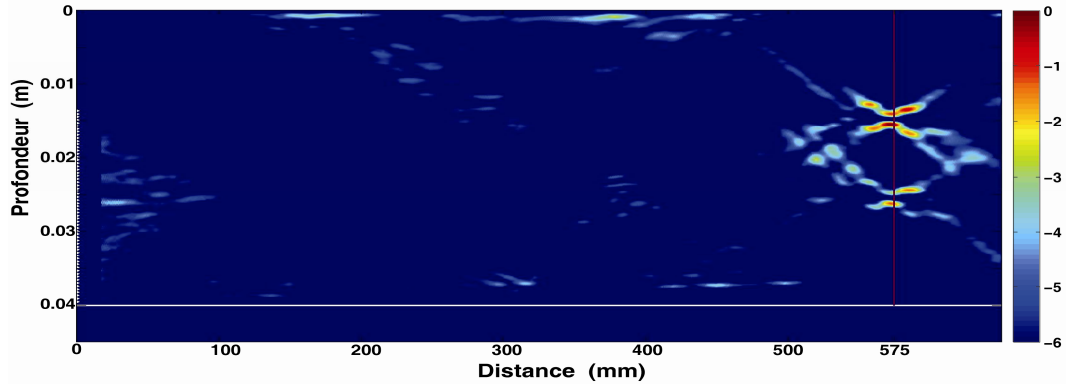


Fig.3.14 Repropagation avec le code numérique R.A.M du troisième vecteur singulier en fonction de la distance. Le champ est moyenné sur toutes les fréquences.

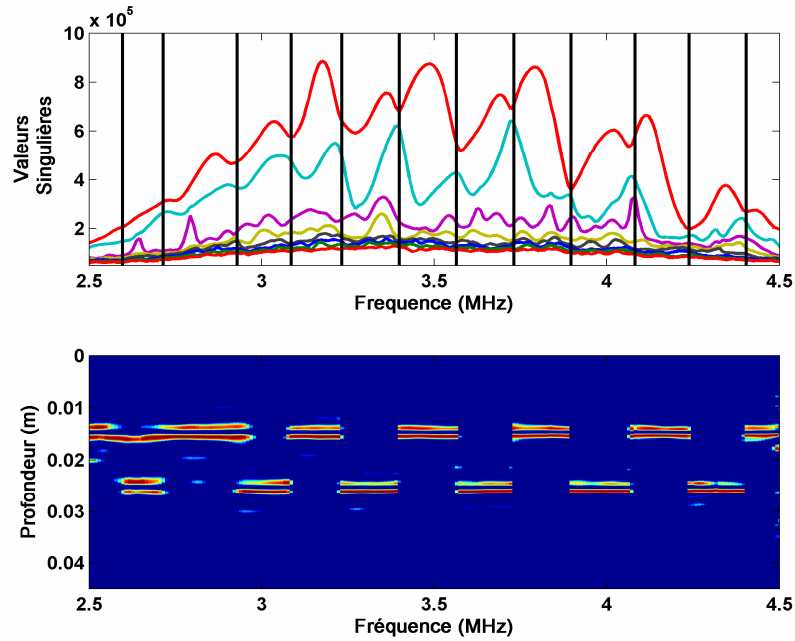


Fig.3.15 a) Zoom sur la troisième et quatrième valeur singulière en fonction de la fréquence. b) Repropagation avec le code numérique R.A.M du troisième vecteur singulier en fonction de la fréquence et de la profondeur à la distance $R=575$ mm. La tâche de focalisation est anti-symétrique par rapport au centre du diffuseur comme le prédit la théorie.

III.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons démontré que la première valeur singulière de la matrice des réponses inter-éléments était proportionnelle à la fonction de forme rétrodiffusée de la cible considérée et cela même dans un guide d'onde. Nous avons utilisé pour cela une décomposition de la fonction de Green en modes normaux pour un réseau occupant toute la hauteur d'eau et de plus nous avons utilisé l'approximation paraxiale pour en déduire une formulation analytique des deux premières valeurs singulières dans le cas d'une cible étendue. Cela nous a permis de proposer une méthode d'identification d'une cible située dans un guide d'onde inconnu et d'en définir les limites. Grâce à la méthode des modes normaux que nous avons utilisée, nous avons pu définir la grandeur $\Lambda = \lambda / 2\sin(\theta_{max})$ qui est analogue au critère de Rayleigh dans un guide et ceci en concordance avec les résultats développés par Gaunard *et al.* grâce à la méthode des images. En effet, il a été démontré que deux cibles ponctuelles isotropes sont faiblement couplées lorsque la distance les séparant est supérieure à Λ . Cette distance est aussi la distance limite entre une cible et une interface au-delà de laquelle la dépendance fréquentielle de la première valeur singulière est presque identique à la fonction de forme de cette cible. L'étude de la dépendance angulaire de la fonction de forme d'une cible étendue couplée à une méthode perturbative nous a aussi permis de montrer que la seconde valeur singulière est proportionnelle à la dérivée seconde de la fonction de forme par rapport à la différence entre l'angle incident et l'angle de réflexion. En tant que paramètre d'identification, cette valeur singulière est d'autant plus intéressante que son niveau augmente comme le cube du nombre de réflexions aux interfaces pris en compte dans le calcul DORT.

La théorie proposée a été confirmée par des expériences « petite échelle » en cuve réalisées sur des sphères d'acier. Plusieurs valeurs singulières étaient associées à ces sphères. Nous avons réussi à extraire avec succès la fonction de forme d'une sphère seule placée dans un guide d'onde inconnu sans aucune hypothèse concernant les propriétés du guide (autre qu'une hypothèse d'approximation paraxiale).

La méthode DORT est donc un outil très efficace pour caractériser une cible dans un guide d'onde inconnu tant que cette cible est au moins distante de Λ de tout autre

élément du guide. De plus, certaines expériences récentes non présentées dans ce manuscrit tendent à montrer que cette capacité de caractérisation pourrait tout à fait être associée à la capacité de la méthode DORT de séparer une cible de la réverbération venant du fond d'un guide rugueux.

Ces considérations ne nécessitent que très peu de connaissances a priori du guide. Cependant lorsqu'un modèle précis du guide est fourni la repropagation des vecteurs propres permet de réassocier sans ambiguïté une valeur singulière à sa cible et ce même s'il apparaît des croisements de valeurs singulières. De cette façon, nous pouvons extraire les fonctions de formes de plusieurs cibles placées à la même distance. Nous avons ainsi montré que la méthode DORT est capable de détecter, séparer et identifier deux sphères dont le diamètre ne diffère que de 5%.

Cependant, bien que très prometteuses, ces expériences faites en laboratoire ne prennent pas en compte les difficultés qui peuvent se rajouter lors d'expériences en mer. C'est pourquoi une campagne à grande échelle a été organisée qui se déroulera en décembre 2008 à Brest. Une série d'expériences de caractérisation de cibles permettra alors de valider in-situ les théories que nous avons présentées dans ce chapitre.

Annexe A : Première valeur singulière pour un diffuseur isotrope dans un guide d'onde

La valeur singulière Σ_1 est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1 &= \frac{|S(0)|}{4\pi R D k_0 \delta} \sum_{m=0}^{M-1} \sin^2(k_{zm} z_s) \\
 &= \frac{|S(0)|}{4\pi R D k_0 \delta} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1 - \cos(2k_{zm} z_s)}{2} \\
 &= \frac{|S(0)|}{8\pi R D k_0 \delta} \left(M - \Re e \left(\sum_{m=0}^{M-1} e^{i 2 \frac{(m+1/2)\pi}{D} z_s} \right) \right) \\
 &= \frac{|S(0)|}{8\pi R D k_0 \delta} \left(M - \Re e \left(e^{i \frac{\pi}{D} z_s} \sum_{m=0}^{M-1} \left(e^{i 2 \frac{\pi}{D} z_s} \right)^m \right) \right)
 \end{aligned} \tag{A1}$$

De plus, la série géométrique de raison $e^{i2\frac{\pi}{D}z_s}$ possède la solution exacte suivante :

$$\sum_{m=0}^{M-1} \left(e^{i2\frac{\pi}{D}z_s} \right)^m = \frac{1 - e^{i2\frac{\pi}{D}Mz_s}}{1 - e^{i2\frac{\pi}{D}z_s}} \quad (\text{A2})$$

On en déduit donc que l'Eq.(A1) devient :

$$\Sigma_1 = \frac{|S(0)|}{8\pi R D k_0 \delta} \left(M - \cos\left(\frac{\pi M z_s}{D}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi M z_s}{D}\right)}{\sin\left(\frac{\pi z_s}{D}\right)} \right) \quad (\text{A3})$$

Dans un soucis de simplification d'écriture, on introduit la fonction f_M définie par :

$$f_M(\xi) = \left(\cos(\pi M \xi) \frac{\sin(\pi M \xi)}{\sin(\pi \xi)} \right) \quad (\text{A4})$$

L'expression de la première valeur singulière s'écrit alors de façon plus compacte :

$$\Sigma_1 = \frac{|S(0)|}{8\pi R D k_0 \delta} \left(M - f_M\left(\frac{z_s}{D}\right) \right) \quad (\text{A5})$$

Annexe B : Calcul du terme de couplage entre \mathbf{h}_s et $\partial_z \mathbf{h}_s$

Ici nous voulons calculer la norme de la dérivé première de \mathbf{h}_s par rapport à z et le produit scalaire entre \mathbf{h}_s et $\partial_z \mathbf{h}_s$, c'est-à-dire :

$$\|\partial_z \mathbf{h}_s\|^2 = \frac{1}{8\pi \rho R \delta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\partial_z \Psi_m(z_s) \right)^2}{k_m} \quad (\text{B1})$$

et

$$\mathbf{h}_s^\dagger \partial_z \mathbf{h}_s = \frac{1}{8\pi\rho R\delta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi_m(z_s) \partial_z \Psi_m(z_s)}{k_{zm}} \quad (\text{B2})$$

Si on suppose que le guide est parfait et que la somme sur les modes est finie, (B1) et (B2) peuvent s'écrire :

$$\|\partial_z \mathbf{h}_s\|^2 = \frac{1}{4\pi R D k_0 \delta} \sum_{m=0}^{M-1} k_{zm}^2 \cos^2(k_{zm} z_s) \quad (\text{B3})$$

$$\mathbf{h}_s^\dagger \partial_z \mathbf{h}_s = \frac{1}{4\pi R D k_0 \delta} \sum_{m=0}^{M-1} k_{zm} \sin(k_{zm} z_s) \cos(k_{zm} z_s) \quad (\text{B4})$$

Ces deux expressions peuvent se calculer en utilisant les dérivées première et seconde de f_M .

En effet,

$$\mathbf{h}_s^\dagger \partial_z \mathbf{h}_s = \frac{1}{4\pi R D k_0 \delta} \frac{1}{2D} f'_M\left(\frac{z_s}{D}\right) \quad (\text{B5})$$

et,

$$\|\partial_z \mathbf{h}_s\|^2 = \frac{1}{8\pi R D k_0 \delta} \left(\frac{(4M^3 - M)\pi^2}{12D^2} + \frac{f''_M\left(\frac{z_s}{D}\right)}{4D^2} \right) \quad (\text{B6})$$

$$f'_M(\xi) = \left(\frac{2M \sin(\pi\xi) \cos(2\pi M \xi) - \cos(\pi\xi) \sin(2\pi M \xi)}{2 \sin^2(\pi\xi)} \right) \quad (\text{B7})$$

$$\Gamma = \frac{f'_M\left(\frac{z_s}{D}\right)}{\sqrt{M - f_M\left(\frac{z_s}{D}\right) \left[\frac{(4M^3 - M)\pi^2}{3D^2} - f''_M\left(\frac{z_s}{D}\right) \right]}} \quad (\text{B8})$$

Bibliographie

- ¹ R. H. Hackman, and G. S. Sammelmann, "Multiple scattering analysis for a target in an oceanic waveguide," *J. Acoust. Soc. Am.* **84**, 1813–1825 (1988).
- ² F. Ingenito, "Scattering from an object in a stratified medium" *J. Acoust. Soc. Am.* **82**, 2051–2059 (1987).
- ³ P. Mignerey, and S. Finette, "Multichannel deconvolution of an acoustic transient in an oceanic waveguide," *J. Acoust. Soc. Am.* **92**, 351–364 (1992).
- ⁴ S. Finette, P. Mignerey, J. Smith III, and C. Richmond, "Broadband source signature extraction using a vertical array," *J. Acoust. Soc. Am.* **94**, 309–318 (1993).
- ⁵ T. C. Yang, and T. W. Yates, "Scattering from an object in a stratified medium. II. Extraction of scattered signature," *J. Acoust. Soc. Am.* **96**, 1020 (1994)
- ⁶ G. C. Gaunaurd, and H. Huang, "Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary," *J. Acoust. Soc. Am.* **96**, 2526–2536 (1994).
- ⁷ N. Mordant, C. Prada, and M. Fink, "Highly resolved detection and selective focusing in a waveguide using the D.O.R.T. method," *J. Acoust. Soc. Am.* **105**, 2634–2642 (1999).
- ⁸ C. Prada, J. De Rosny, D. Clorennec, J. G. Minonzio, A. Aubry, M. Fink, L. Bernière, S. Hibrat, P. Billand, and T. Folégot, "Experimental detection and focusing in shallow water by Decomposition of the Time Reversal Operator," *J. Acoust. Soc. Am.* **122**, 768–761 (2007).
- ⁹ D. H. Chambers, and A. K. Gautesen, "Time reversal for a single spherical scatterer," *J. Acoust. Soc. Am.* **109**, 2616–2624 (2001).
- ¹⁰ D. H. Chambers, "Analysis of the time-reversal operator for scatterers of finite size," *J. Acoust. Soc. Am.* **112**, 411–419 (2002).
- ¹¹ J. G. Minonzio, C. Prada, D. Chambers, D. Clorennec, and M. Fink, "Characterization of subwavelength elastic cylinders with the decomposition of the time-reversal operator: Theory and experiment," *J. Acoust. Soc. Am.* **117**, 789–798 (2005).
- ¹² J. G. Minonzio, F. D. Philippe, C. Prada, and M. Fink, "Characterization of an elastic cylinder and an elastic sphere with the time-reversal operator: Application to the sub-resolution limit," to appear *Inverse Problems*.
- ¹³ F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter, and H. Schmidt, "Computational Ocean Acoustics," Chapter 2, 123–127, (American Institute of Physics, New York, 1994).
- ¹⁴ J. G. Minonzio, C. Prada, A. Aubry and M. Fink, "Multiple scattering between two elastic cylinders and invariants of the time-reversal operator: Theory and experiments," *J. Acoust. Soc. Am.* **102**, 875–883 (2006).
- ¹⁵ M. D. Collins, "A split-step Padé solution for the parabolic equation method," *J. Acoust. Soc. Am.* **93**, 1736–1742 (1993).

Chapitre IV

Décomposition de l'Opérateur

Retournement Temporel appliqué à un système non stationnaire

Sommaire

1. Position du problème	125
2. Cible mobile en eau libre	129
2.1. Acquisition séquentielle de la matrice de transfert \mathbf{K}	129
2.2. Acquisition « colonne par colonne » de la matrice de transfert \mathbf{K}	135
2.3. Utilisation des vecteurs singuliers pour retrouver le parcours de la cible	148
3. Cible mobile en guide d'onde	154
3.1. Géométrie de l'acquisition	154
3.2. Ecriture de l'Opérateur de Retournement Temporel.....	155
3.3. Résultats expérimentaux et simulations	158
4. Détection en guide d'onde en présence de vagues	161
4.1. Théorie	161
4.2. Expériences en cuve.....	167
5. Conclusion	170
Annexe A : Calcul des valeurs propres et vecteurs propres de l'ORT	172
Annexe B : Formulation de la base des vecteurs propres	175
Annexe C : Expression des valeurs propres de l'Opérateur de Retournement Temporel.....	177
Annexe D : Développement limité de l'Opérateur de Retournement Temporel en guide d'onde...	177
Bibliographie.....	183

Comme nous l'avons déjà énoncé précédemment, le principe du retournement temporel sur lequel est fondée la méthode DORT repose sur un élément essentiel qui est la stationnarité du système. En effet, lors d'une expérience de retournement temporel, un signal bref est envoyé dans un milieu et la série d'échos reçus est réémise en chronologie inverse dans le milieu réel. La condition nécessaire à la refocalisation spatio-temporelle de l'onde est que le milieu considéré n'a pas changé entre l'acquisition et la réémission.

De la même façon, pour la méthode DORT, la réémission des vecteurs singuliers de la matrice de transfert \mathbf{K} nécessite que le milieu ne change pas entre l'acquisition de la matrice de transfert \mathbf{K} et la réémission des vecteurs propres.

De plus, l'acquisition de la totalité de la matrice \mathbf{K} étant en général assez longue (de l'ordre de N fois le temps d'aller-retour à la cible considérée, où N est le nombre de capteurs de l'antenne), il s'ajoute une autre condition qui est la stationnarité du milieu mais cette fois-ci pendant toute la durée de l'acquisition de la matrice inter-élément.

La littérature est riche et variée concernant les effets d'un milieu changeant pendant une expérience de retournement temporel^[1-3]. Par exemple, Roux *et al.* montrent la dégradation de la tâche focale d'une expérience de retournement temporel dans le cas où la surface est perturbée par des vagues (en expérience petite échelle) et Sabra *et al.* étudient l'effet d'une déformation de l'antenne sur la qualité de la refocalisation dans un guide d'ondes grâce à une décomposition en modes normaux.

Par contre, la méthode DORT en milieu non stationnaire n'a pas encore été étudiée de manière théorique. Ce problème avait été abordé par Mordant *et al.*^[4] à travers quelques expériences ultrasonores en présence de vagues. Dans ces expériences, on observait des valeurs secondaires, ce qui met en défaut la loi qui associe n valeurs singulières à n cibles. Ce phénomène a ensuite été observé lors des expérience « taille réelle » en rade de Brest^[5] ce qui a motivé l'étude proposée dans ce chapitre. Afin de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu, nous avons mis en place différentes simulations et expériences à petite échelle. Nous avons ainsi fait le rapprochement entre une modification de l'état de surface du guide et un mouvement vertical des images virtuelles de la cible.

De prime abord, le problème est assez complexe, nous utilisons donc une approche progressive. Ainsi le but de ce chapitre est de comprendre et de modéliser les effets d'un mouvement vertical de la cible pendant une acquisition DORT sur les valeurs propres et les vecteurs propres dans différentes configurations. Tout d'abord, nous considérons le cas d'une cible animée d'un mouvement parallèle au réseau dans une configuration « eau libre », puis nous considérons le cas d'une cible en mouvement dans un guide d'onde, enfin nous utilisons les résultats des deux premiers cas pour traiter le cas d'une cible immobile dans un guide présentant des vagues (ou ondes de surface gravitationnelles) à sa surface.

Nous avons formalisé l'écriture de la matrice de transfert pour différentes méthodes d'acquisition : acquisition de la matrice point par point et colonne par colonne, en eau libre dans la section IV.2 ou en guide d'onde dans la section IV.3. Nous avons couplé une méthode perturbative couramment utilisée en mécanique quantique à une définition intuitive des vecteurs propres basée sur des résultats expérimentaux précédents pour donner une formulation analytique des valeurs propres. Une méthode originale de suivi du mouvement de la cible est ensuite présentée.

Pour finir, dans la section IV.4, nous avons étendu ces résultats au cas d'une acquisition DORT en présence de vagues.

IV.1. Position du problème

L'étude des valeurs propres de l'Opérateur de Retournement Temporel et de leur évolution dans un milieu non stationnaire est motivée par une série d'expériences réalisées par les chercheurs du Laboratoire Ondes et Acoustique et d'Atlantide dans la rade de Brest en 2005^[5]. En effet, les résultats acquis lors de cette campagne dépendaient fortement de l'état de surface de la mer, la présence de vagues faisant remonter le niveau des valeurs singulières de bruit de façon non négligeable (cf figure 4.1). Il fut alors tout naturel d'essayer de recréer à petite échelle en environnement contrôlé les mêmes conditions expérimentales afin de mieux comprendre ce phénomène.

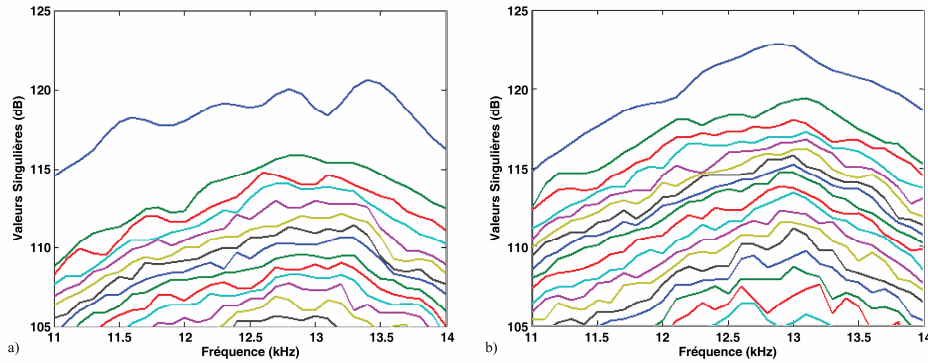


Fig.4.1 Valeurs singulières associée à l'écho d'une cible « nid d'abeille » placée à 150 m de distance dans la baie de Ste Anne du Portzic pendant la campagne DOREV a) en mer calme b) en mer agitée.

De nombreuses études ont été faites dans les années 40 sur la modélisation des ondes de surface en mer, tout d'abord sur les effets d'une surface non plane immobile sur la transmission acoustique en mer^[6-9] puis plus récemment sur la génération de bruit par une surface de l'eau animée d'un mouvement^[10,11]. Il a été montré qu'une surface aléatoirement perturbée possède un comportement diffusif similaire à une surface périodiquement perturbée^[9] et la diffusion par la surface du guide étant linéaire, les modèles utilisés sont souvent basés sur une déformation sinusoïdale de la surface puis généralisés au cas périodique par décomposition de Fourier.

La figure 4.2 montre le dispositif expérimental que nous avons utilisé pour reproduire à petite échelle une expérience d'acquisition DORT en présence de vagues sinusoïdales. La génération de vagues se rapprochant le plus de la réalité n'étant pas l'objet de ce manuscrit, le dispositif a été choisi pour sa simplicité de mise en œuvre et sa facilité à être modélisé, ainsi un pot vibrant piloté par un générateur basses fréquences est utilisé pour créer des ondes de surfaces gravitationnelles sinusoïdales de fréquence et d'amplitude contrôlées.

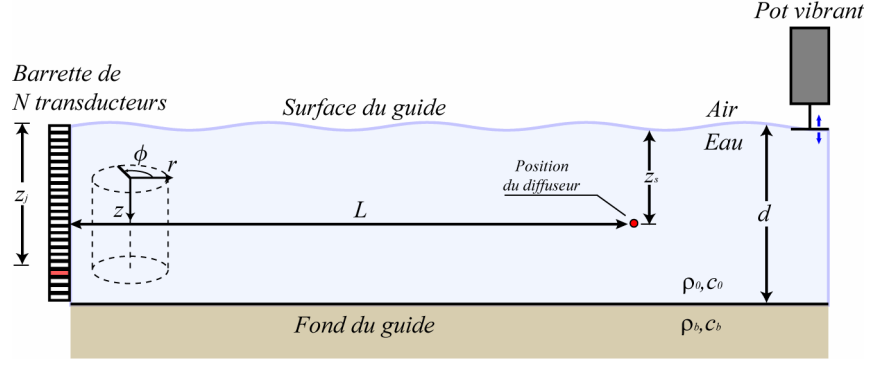


Fig.4.2 Géométrie de l'expérience en présence de vagues. Les vagues ou ondes de surface gravitationnelles sont générées par un pot vibrant couplé à un générateur basse fréquence délivrant une tension sinusoïdale dont on contrôle l'amplitude et la fréquence. Dans le cas présent, $L=400$ mm, $d=38$ mm, $f=3$ Hz et la cible est un fil d'élastane placé à $z_s=25$ mm de la surface.

D'après la littérature, la pulsation ω et le nombre d'onde k d'une onde de surface gravitationnelle sont reliés par l'équation de dispersion suivante ^[12] :

$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho}$$

où g est l'accélération de la pesanteur, ρ la densité de l'eau et T la tension de surface. Le terme associé à la tension de surface est dominé par le terme de pesanteur lorsque la fréquence est inférieure à environ 14 Hz et devient complètement négligeable lorsque celle-ci est inférieure à 5 Hz. Dans ce cas, la longueur d'onde d'une onde de gravité dans le cas d'un espace semi-infini est donnée par $\lambda = \frac{g}{2\pi f^2}$. On peut considérer que le fond du guide est assez éloigné de la surface pour ne pas être pris en compte dans le calcul de la longueur d'onde des vagues. Pour notre expérience, nous avons choisi une fréquence de vagues de 3 Hz ce qui équivaut à une longueur d'onde d'environ 17 cm. On a donc quelques λ sur toute la longueur du guide. L'étude a été faite en considérant plusieurs amplitudes de vagues allant de 0 mm à quelques mm avec une hauteur du guide d'environ 30 mm. Ces paramètres expérimentaux sont en concordance avec les différentes mesures qui ont déjà été faites en milieu naturel^[2,10,11].

L'évolution des valeurs singulières en fonction de l'écart type de la hauteur des vagues est tracée sur la figure 4.3.

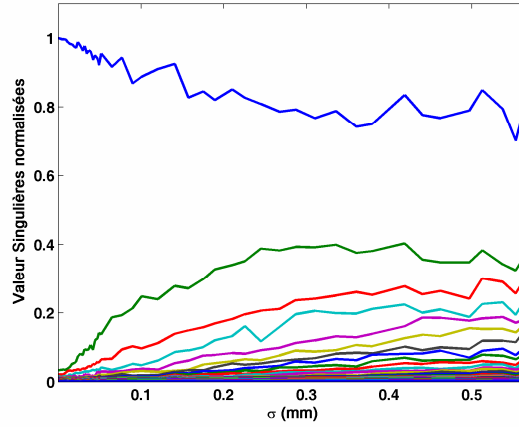


Fig.4.3 Evolution des valeurs singulières normalisées par la réflectivité « apparente » de la cible en fonction de l'amplitude des vagues pour une fréquence d'acquisition de 2,5 MHz.

Cette figure montre que lorsque le guide ne subit pas de perturbation, la SVD de \mathbf{K} donne une unique valeur singulière non nulle. Autrement dit, le rang de la matrice est égal à 1. En présence de vagues, \mathbf{K} n'est plus dégénérée et des valeurs singulières secondaires apparaissent. Ces valeurs singulières sont associées soit à la cible, soit à un bruit créé par l'agitation de la surface. Si ces valeurs singulières étaient dues uniquement à une augmentation du bruit, ce qui semble être l'hypothèse la plus simple, elles augmenteraient toutes de façon uniforme avec l'augmentation de l'amplitude des vagues^[13]. Or ce n'est pas le cas, ces valeurs singulières augmentent et se détachent du bruit l'une après l'autre. De plus, il est communément admis que les ondes de surfaces stationnaires sont les seules ondes de surface dont le niveau de bruit est non négligeable^[7]. Il est donc peu probable que l'augmentation du niveau des valeurs singulières d'indice supérieur à 1 soit due à un bruit acoustique généré par les vagues. L'hypothèse que nous avons considérée est que les trajets des rayons acoustiques qui subissent une ou plusieurs réflexions aux interfaces sont perturbés par la présence de vagues. Ce phénomène est équivalent à un mouvement des cibles virtuelles et les valeurs singulières sont donc associées à la cible. Ce raisonnement nous a donc amenés à considérer le problème

similaire d'une cible en mouvement pendant l'acquisition DORT, tout d'abord en eau libre puis en guide d'onde. L'intérêt étant de simplifier le problème pour considérer ensuite le cas de la surface mobile. Les sections suivantes présentent donc les résultats de ces études sur des cibles isotropes en mouvement puis le lien est fait avec le cas des ondes de surface.

IV.2. Cible mobile en eau libre

Dans cette partie, nous traitons le cas d'un diffuseur isotrope centré par rapport à la barrette en espace libre. Cette configuration bien que simple se rapproche d'une expérience en milieu océanique « grand fond » (ou d'une expérience avec un réseau horizontal en faible fond). Cette cible est animée d'un mouvement parallèle au réseau pendant l'acquisition de la matrice de transfert \mathbf{K}^4 . Pour simplifier l'écriture du problème, nous avons considéré une situation quasi-statique : la cible est considérée immobile à chaque acquisition et ne bouge que dans l'intervalle de temps entre deux acquisitions. Les effets de type Doppler qui sont liés à la vitesse de la cible ne sont donc pas pris en compte.

En pratique, l'acquisition de la matrice de transfert peut se faire de 2 façons : soit de manière séquentielle où chaque élément de la matrice est acquis l'un après l'autre, soit colonne par colonne. La différence entre ces deux méthodes se situe dans le niveau de la corrélation entre les éléments de la matrice de transfert. Dans la suite, nous avons détaillé l'influence du mouvement de la cible sur les valeurs propres de l'Opérateur de Retournement Temporel pour ces deux types d'acquisition.

IV.2.1. Acquisition séquentielle de la matrice de transfert \mathbf{K}

Nous allons tout d'abord présenter les résultats concernant une acquisition séquentielle. Dans ce type de mesure, chaque élément K_{ij} de la matrice de transfert est acquis indépendamment des autres. Chaque élément correspond donc à une position de la

⁴ On ne considère pas les mouvements perpendiculaires au réseau car ils ne perturbent quasiment pas la matrice \mathbf{K} . En effet, la cellule de résolution est beaucoup plus longue que large et donc l'extension des mouvements requis pour perturber la matrice est d'un tout autre ordre de grandeur.

cible et le nombre d'émissions-réceptions à réaliser pour acquérir toute la matrice de transfert est N^2 avec N le nombre de transducteurs composant le réseau.

2.1.1. Formalisation du système

On considère un réseau vertical, de N transducteurs d'ouverture d , dont les positions M_j sont $(0, 0, z_j)$ en coordonnées cartésiennes avec les z_j uniformément répartis sur l'ouverture.

Ces transducteurs tirent tour à tour sur une cible située en un point voisin de $S = (L, 0, 0)$. Cette cible se déplace verticalement entre chaque émission (cf figure 4.8). On effectue N^2 acquisitions pendant lesquelles le transducteur i émet et le transducteur j enregistre, pour i et j allant de 1 à N . La cible se déplace entre chaque tir, sa position pendant l'expérience (i, j) est :

$$S^{(ij)} = S + \sigma(0, 0, Z^{(ij)}) = (L, 0, \sigma Z^{(ij)}) \quad (4.1)$$

où les $Z^{(ij)}$ sont des variables indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne nulle et de variance 1.

Remarque : la loi de distribution des $Z^{(ij)}$ n'a, pour l'instant, pas d'incidence sur les résultats, sous réserve que N soit grand.

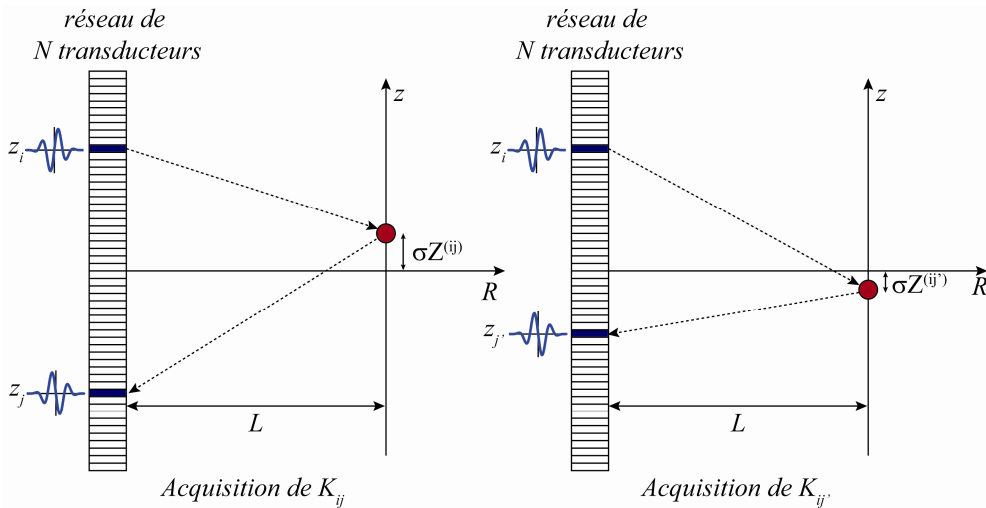


Fig.4.4 Présentation des conditions d'acquisition de la matrice des réponses inter-éléments et des notations utilisées dans le cas du modèle séquentiel.

Les éléments de la matrice des réponses impulsionnelles inter-élément s'écrivent alors :

$$K_{ij} = \frac{1}{16\pi^2 |M_i S^{(ij)}| |M_j S^{(ij)}|} e^{ik(|M_i S^{(ij)}| + |M_j S^{(ij)}|)} \quad (4.2)$$

avec k le nombre d'onde intrinsèque ($k = \omega/c_0$)

En considérant que le pas du réseau d et l'écart type des déplacements σ sont négligeables devant L , les termes au dénominateur sont voisins de L . Ainsi l'Eq.(4.2) se simplifie en :

$$K_{ij} = \frac{1}{16\pi^2 L^2} e^{ik(|M_i S^{(ij)}| + |M_j S^{(ij)}|)} \quad (4.3)$$

L'étude des valeurs propres s'effectue sur cette expression de la matrice K .

2.1.2. Ecriture de l'Opérateur Retournement Temporel et expression analytique des valeurs propres

Dans la suite, en plus de supposer que σ est petit devant L , nous considérons que le nombre de transducteurs N est suffisamment grand pour pouvoir utiliser la loi des grands nombres.

Cette configuration d'acquisition est intéressante car on est dans des conditions où la théorie des matrices aléatoires s'applique puisque les coefficients de la matrice sont indépendants. Cependant dans le cas classique, les variances des coefficients sont égales ce qui n'est pas le cas ici, mais il existe des versions des théorèmes classiques qui traitent ce cas^[14,15]. En effet, la variance du coefficient K_{ij} (pour σ petit) s'écrit⁵ :

⁵ On utilise $K_{ij} = \frac{1}{16\pi^2 L^2} e^{ik(\sqrt{L^2 + z_i^2 - 2z_i \sigma Z^{(ij)}} + \sqrt{L^2 + z_j^2 - 2z_j \sigma Z^{(ij)}} + \sigma^2 Z^{(ij)2})} \simeq \frac{1}{16\pi^2 L^2} e^{ik(\sqrt{L^2 + z_i^2} - \frac{z_i \sigma Z^{(ij)}}{\sqrt{L^2 + z_i^2}} + \sqrt{L^2 + z_j^2} - \frac{z_j \sigma Z^{(ij)}}{\sqrt{L^2 + z_j^2}})}$ en négligeant

les termes en σ^2 et en factorisant par $\sqrt{L^2 + z_i^2}$ et $\sqrt{L^2 + z_j^2}$. On approxime ensuite le terme de phase restant par son développement limité en σ .

$$\begin{aligned} \langle |K_{ij}|^2 \rangle - \langle |K_{ij}| \rangle^2 &= \frac{k^2 \sigma^2}{256\pi^4 L^4} \left\langle \left(\frac{z_i Z^{(ij)}}{\sqrt{L^2 + z_i^2}} + \frac{z_j Z^{(ij)}}{\sqrt{L^2 + z_j^2}} \right)^2 \right\rangle \\ &= \frac{k^2 \sigma^2}{256\pi^4 L^4} \left(\frac{z_i}{\sqrt{L^2 + z_i^2}} + \frac{z_j}{\sqrt{L^2 + z_j^2}} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

qui n'est pas du tout indépendante de i et j .

La variance moyenne des coefficients est calculée dans le régime N grand afin de transformer la somme discrète en somme continue :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \langle |K_{ij}|^2 \rangle &= \frac{k^2 \sigma^2}{256\pi^4 L^4 N^2} \sum_{ij} \left(\frac{z_i^2}{L^2 + z_i^2} + \frac{2z_i z_j}{\sqrt{L^2 + z_i^2} \sqrt{L^2 + z_j^2}} + \frac{z_j^2}{L^2 + z_j^2} \right) \\ &= \frac{k^2 \sigma^2}{256\pi^4 L^4 N^2} 2 \left[\sum_{ij} \frac{z_i^2}{L^2 + z_i^2} + \left(\sum_i \frac{z_i}{\sqrt{L^2 + z_i^2}} \right)^2 \right] \\ &= \frac{k^2 \sigma^2}{128\pi^4 L^4 N^2} \left[N \times \frac{N}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{z_i^2}{L^2 + z_i^2} dz_i + \left(\frac{N}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \underbrace{\frac{z_i}{\sqrt{L^2 + z_i^2}}}_{=0} dz_i \right)^2 \right] \\ &= \frac{k^2 \sigma^2}{128\pi^4 L^4} \left(1 - \frac{2L}{d} \arctan\left(\frac{d}{2L}\right) \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

La décomposition en valeurs singulières donne une valeur singulière isolée en :

$$\Sigma_0 = \frac{N}{16\pi^2 L^2} \quad (4.6)$$

et, d'après Boutet de Monvel *et al.*, un continuum de valeurs singulières décrit par une densité ρ à support compact et un maximum donné par :

$$\Sigma_1 = \frac{k\sigma\sqrt{N}\alpha}{16\pi^2 L^2} \sqrt{1 - \frac{2L}{d} \arctan\left(\frac{d}{2L}\right)} \quad (4.7)$$

Le rapport des deux valeurs singulières pour $d \ll 2L$ est donc :

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0} = \frac{dk\sigma\alpha}{2\sqrt{3}NL} \quad (4.8)$$

Le coefficient α de l'Eq.(4.7) devrait être $\alpha = 2\sqrt{2} \approx 2.8$ si les coefficients de \mathbf{K} avaient la même variance. Ici, on est dans une situation inhomogène, et le système à résoudre pour obtenir la densité ρ et le maximum Σ_1 (i.e. la second valeur singulière) est compliqué^[14,15].

2.1.3. Résultats simulés et expérimentaux

Nous faisons l'hypothèse que les positions de la cible sont des variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) et leur distribution suit une loi normale de moyenne nulle et d'écart type σ .

Les paramètres présentés sur la figure 4.7 ont été utilisés systématiquement dans la suite de ce manuscrit pour toutes les simulations et expériences en eau libre quelque soit le type d'acquisition.

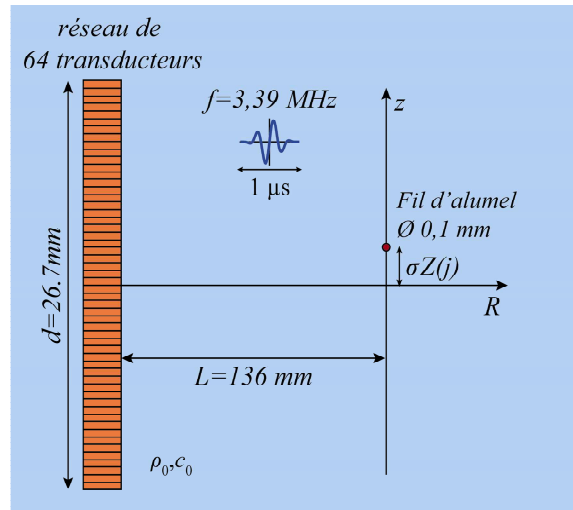


Fig.4.5 Disposition et paramètres des simulations et des expériences dans cette section. La distance inter-élément de la barrette est de $\delta=0.417$ mm

Les résultats de la simulation sont tracés sur la figure 4.6, on trouve pour la deuxième valeur singulière du mode d'acquisition séquentielle une valeur de α légèrement supérieure à $2\sqrt{2}$. Par contre, les valeurs expérimentales tracées sur la figure 4.7 montrent un coefficient α égal à 3.9.

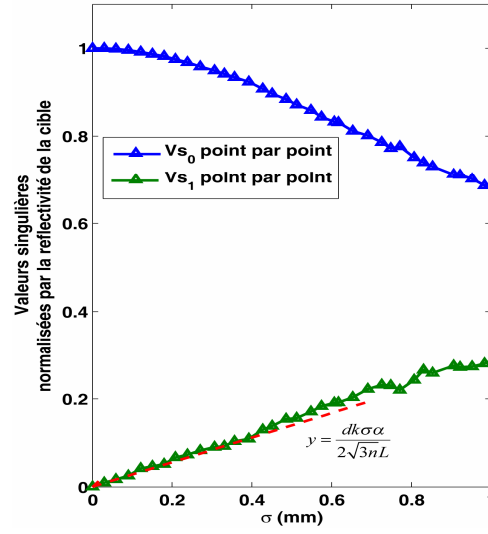


Fig.4.6 Tracé des 2 premières valeurs singulières simulées pour la méthode d'acquisition séquentielle et droites théoriques pour $\alpha=2\sqrt{2}$ (pointillé rouge). Les valeurs singulières sont normalisées par la réflectivité apparente de la cible.

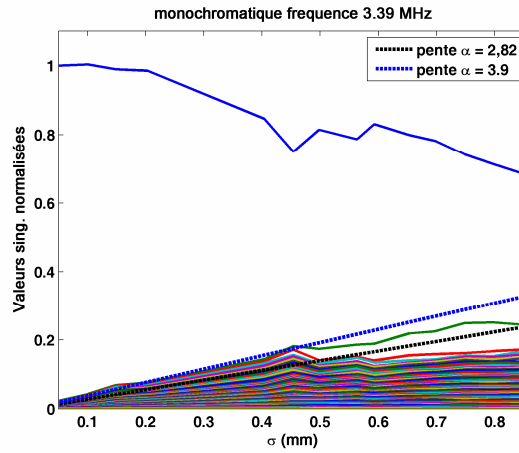


Fig.4.7 Tracé en échelle a) linéaire des 10 premières valeurs singulières expérimentales normalisées par la première valeur singulière pour une acquisition séquentielle. La fréquence d'acquisition est $f=3.39$ MHz, $L=136$ mm, $d=26$ mm et $N=62$. On retrouve bien le type de loi décrit par la théorie soit un continuum de valeurs singulières avec une évolution en σ .

IV.2.2. Acquisition « colonne par colonne » de la matrice de transfert K

Le modèle précédent est intéressant pour sa simplicité et la richesse des travaux déjà réalisés, en télécommunication par exemple. Cependant, il n'est pas très réaliste dans le cadre d'expériences d'acoustique sous-marine où le temps requis pour l'acquisition de la matrice de transfert K élément par élément devient vite prohibitif. En effet, une configuration beaucoup plus « classique » d'acquisition de la matrice impulsionnelle inter-élément consiste à tirer avec une voie et à recevoir l'écho de la cible sur l'ensemble des voies. Ce type d'acquisition est appelé acquisition « colonne par colonne » dans la suite de ce manuscrit.

2.2.1. Définition et géométrie du mode d'acquisition « colonne par colonne »

Comme pour l'acquisition séquentielle, on considère un réseau vertical de N transducteurs, dont les positions M_j sont $(0, 0, z_j)$ avec les z_j uniformément répartis sur l'ouverture. Ces transducteurs tirent tout à tour sur une cible située en un point voisin de $S = (L, 0, 0)$. Cette cible se déplace verticalement.

Cette fois-ci on effectue N expériences pendant lesquelles le transducteur j émet une impulsion et tous les transducteurs enregistrent la réponse du milieu, pour j allant de 1 à N (cf figure 4.8). La cible bouge entre chaque émission, sa position pendant l'expérience j est donnée par :

$$S^{(j)} = S + \sigma(0, 0, Z^{(j)}) = (L, 0, \sigma Z^{(j)}) \quad (4.9)$$

où les $Z^{(j)}$ sont des variables indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne nulle et d'écart type 1.

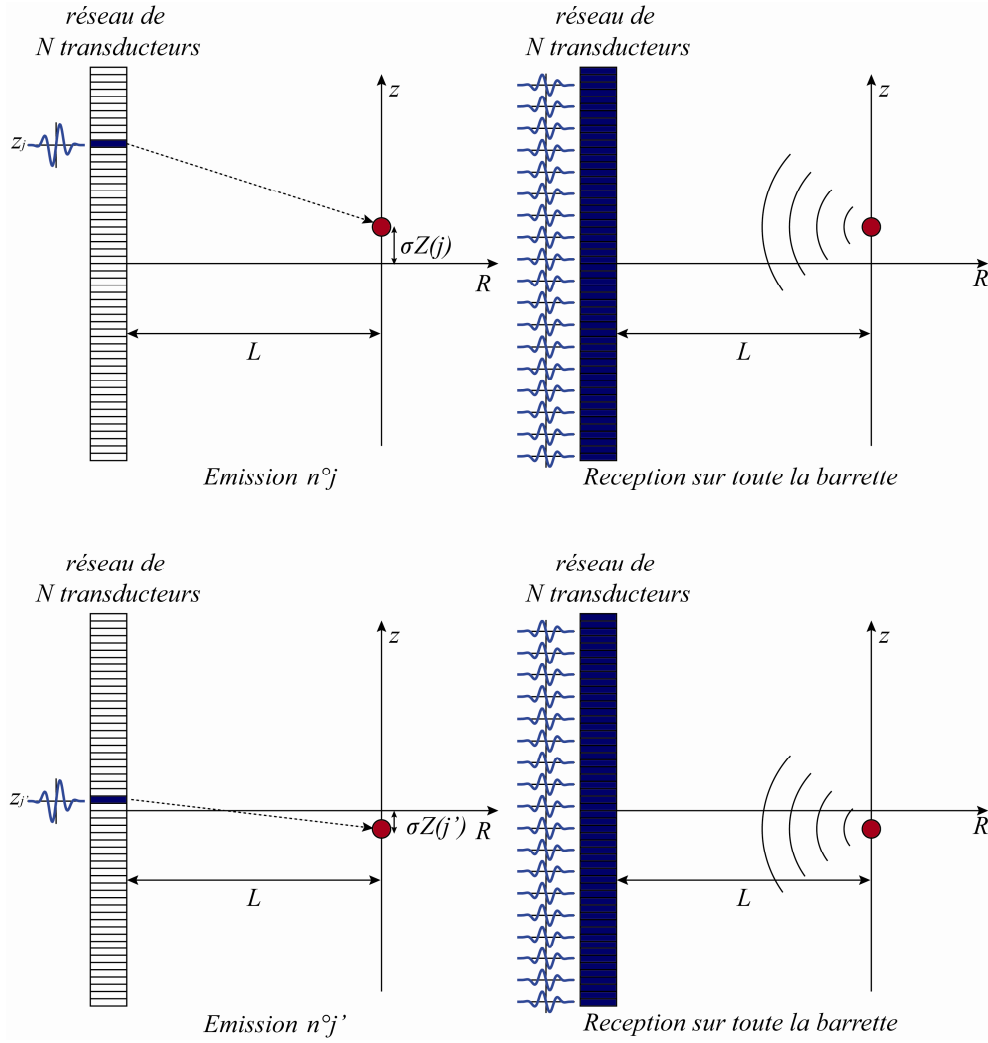


Fig.4.8 Présentation des conditions d'acquisition de la matrice des réponses inter-éléments et des notations utilisées dans le cas du modèle « colonne par colonne ».

Les éléments de la matrice de réponses impulsionnelles inter-élément sont alors :

$$K_{ij} = \frac{1}{16\pi^2 |M_j S^{(j)}| |M_i S^{(j)}|} e^{ik(|M_j S^{(j)}| + |M_i S^{(j)}|)} \quad (4.10)$$

De la même façon que dans le paragraphe précédent, on suppose constant le terme au dénominateur et l'Eq.(11) devient :

$$K_{ij} = \frac{1}{16\pi^2 L^2} e^{ik(|M_j S^{(j)}| + |M_i S^{(j)}|)} \quad (4.11)$$

2.2.2. Méthode perturbative et expression analytique des valeurs propres

Afin de simplifier l'expression de l'Opérateur de Retournement Temporel, nous allons utiliser la propriété suivante : on sait que Σ est valeur singulière de \mathbf{K} si et seulement si il existe des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} tels que $\mathbf{K}\mathbf{v} = \Sigma\mathbf{u}$ et $\mathbf{K}^\dagger\mathbf{u} = \Sigma\mathbf{v}$ († signifie transposé et conjugué). Comme corollaire, si Φ est un vecteur réel et si on définit $\tilde{\mathbf{K}}_{ij} = e^{-i\Phi_i}\mathbf{K}_{ij}e^{-i\Phi_j}$, alors on montre que \mathbf{K} et $\tilde{\mathbf{K}}$ ont les mêmes valeurs singulières⁶.

Autrement dit, si la multiplication de \mathbf{K} par une matrice diagonale unitaire à gauche et à droite, permet de simplifier le problème, on peut faire l'extraction des valeurs singulières sur la nouvelle matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ sans se soucier de ce changement de phase, on obtiendra le même résultat. Par contre, les vecteurs singuliers calculés de cette façon doivent être multipliés par un terme de phase opposé.

Pour le cas qui nous intéresse, on applique ce résultat avec $\Phi_i = k|M_i S^{(i)}|$, ce qui donne :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{ij} = \frac{1}{16\pi^2 L^2} e^{ik(|M_i S^{(j)}| + |M_i S^{(i)}|)} \quad (4.12)$$

La matrice de retournement temporel est alors :

$$\begin{aligned} H_{ij} &= (\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{K}}^\dagger)_{ij} \\ &= \frac{1}{(4\pi L)^4} \sum_{m=1}^n e^{ik(|M_m S^{(i)}| + |M_m S^{(m)}|)} e^{-ik(|M_m S^{(j)}| + |M_m S^{(m)}|)} \\ &= \frac{1}{(4\pi L)^4} \sum_{m=1}^n e^{ik(|M_m S^{(i)}| - |M_m S^{(j)}|)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

En utilisant le fait que N est grand, on transforme la somme discrète en intégrale :

⁶ Preuve : Si $\tilde{\mathbf{v}}_i = e^{-i\Phi_i} \mathbf{v}_i$ et $\tilde{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_i e^{-i\Phi_i}$, alors $\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{v}} = \sigma\tilde{\mathbf{u}}$ si et seulement si $\mathbf{K}\mathbf{v} = \sigma\mathbf{u}$ et $\tilde{\mathbf{K}}^\dagger\tilde{\mathbf{u}} = \lambda\tilde{\mathbf{v}}$ si et

seulement si $\mathbf{K}^\dagger\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \frac{1}{(4\pi L)^4} \frac{N}{d} \int_{-d/2}^{d/2} e^{ik(\sqrt{L^2+(z-\sigma Z^{(i)})^2} - \sqrt{L^2+(z-\sigma Z^{(j)})^2})} dz \\ &= F(\sigma Z^{(i)}, \sigma Z^{(j)}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pour extraire les valeurs propres de cette matrice, on utilise une méthode dérivée des méthodes perturbatives utilisées en mécanique quantique. En effet, en mécanique quantique, la résolution du problème de recherche du niveau d'énergie d'un système passe par la recherche des valeurs propres de l'Hamiltonien de ce système. Il paraît donc naturel d'utiliser des techniques mathématiques analogues pour calculer les invariants du Retournement Temporel. Dans le cas général, le calcul s'effectue de la manière décrite dans la littérature^[16]. Ici, on est dans un cas un peu particulier où le système non perturbé possède une valeur propre nulle dégénérée $N-1$ fois. Cette dégénérescence est levée grâce à l'apparition de la perturbation. Pour pouvoir résoudre ce problème, on fait un développement limité des vecteurs propres et des valeurs propres en σ . Ceux-ci s'écrivent donc comme des polynômes en σ , σ étant le paramètre de contrôle de la perturbation.

La méthode de calcul purement mathématique consiste donc à réaliser les étapes suivantes :

- sans connaissance a priori des vecteurs propres, on développe en série de Taylor la matrice qui décrit le système, ici l'Opérateur de Retournement Temporel, à l'ordre voulu en σ .

- on fait de même avec les vecteurs propres et les valeurs propres remarquant que la perturbation étant paire, le développement ne comporte que des valeurs de σ de puissance paire. On a donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{perturbé}} &= \mathbf{H}_0 + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial \sigma^2} + \dots \\ \mathbf{V}_i &= \alpha_0^{(i)} + \sigma^2 \alpha_1^{(i)} + \sigma^4 \alpha_2^{(i)} + \dots \\ \Lambda_i &= \beta_0^{(i)} + \sigma^2 \beta_1^{(i)} + \sigma^4 \beta_2^{(i)} + \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

On a utilisé une hypothèse supplémentaire qui est que les valeurs propres sont des polynômes en σ , de valuation⁷ $2(j-1)$ pour la $j^{\text{ème}}$ valeur propre, ce qui se traduit par

⁷ Pour rappel la valuation est le degré le plus petit d'un polynôme.

$\beta_i^{(j)} = 0$ pour $i < j$. En écrivant, $\mathbf{H}_{perturbe} \mathbf{V}_i = \Lambda_i \mathbf{V}_i$ et en regroupant les termes de même degré en σ , on doit résoudre un système d'équations à $k+2$ inconnues, où k est l'ordre en σ auquel on arrête le développement limité et dont la résolution est décrite en annexe.

Dans le cas présent, nous avons développé une méthode alternative en nous inspirant des résultats établis dans Aubry *et al.*^[17] où les auteurs démontrent que les vecteurs propres d'un diffuseur dont la dimension spatiale est plus grande que la cellule de résolution (qualifié de mal résolu) sont donnés par les polynômes de Legendre. L'ensemble des polynômes de Legendre de la variable x constitue une base orthogonale des polynômes en x . Nous allons voir que ce résultat peut nous aider à trouver une expression approchée des vecteurs propres dans le cas qui nous intéresse et à avoir une vision plus globale de la distribution des valeurs propres et de leur symétrie.

Tout d'abord, le développement en série limitée de F jusqu'à l'ordre k s'écrit :

$$F(\sigma Z^{(i)}, \sigma Z^{(j)}) = \sum_{p,p'} \frac{\partial_{(p,p')} F(0,0)}{p!p'} (\sigma Z^{(i)})^p (\sigma Z^{(j)})^{p'}, \quad (4.16)$$

$$(p, p') \in [0, k]^2, (p+p') \leq k, (i, j) \in [1, N]^2$$

La forme en puissance de $\sigma Z^{(j)}$ est donc issue du développement de Taylor. Les $(\sigma Z^{(i)})^n$ forment une famille génératrice des polynômes de degré n de la variable discrète $\sigma Z^{(i)}$. Cependant cette famille n'est pas orthonormée. Nous construisons donc la famille de vecteur suivante:

$$(V_k)_j = \sum_{l=0}^k \alpha_l^{(k)} (\sigma Z^{(j)})^l, \quad k \in [0, N-1] \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} (V_0)_j &= \alpha^{(0)} \\ (V_1)_j &= \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} (\sigma Z^{(j)}) \\ (V_2)_j &= \alpha_0^{(2)} + \alpha_1^{(2)} (\sigma Z^{(j)}) + \alpha_2^{(2)} (\sigma Z^{(j)})^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Que l'on construit a priori sans information sur \mathbf{H} en orthonormalisant la base $\{1, \sigma Z^{(j)}, (\sigma Z^{(j)})^2, \dots, (\sigma Z^{(j)})^n\}$. L'expression exacte de ces vecteurs est donnée en annexe.

Nous pourrions penser que cette base est la base des vecteurs propres de $\mathbf{K}\mathbf{K}^\dagger$. Cette hypothèse est a priori justifiée pour les raisons suivantes :

- cette base est orthonormée par construction,
- cette base partage avec les polynômes de Legendre la propriété d'être génératrice de l'espace des polynômes en $\sigma Z^{(j)}$.

Cependant nous allons voir que cette hypothèse n'est valable qu'à l'ordre 0. En effet, on projette, à partir du développement en σ , la matrice $\mathbf{K}\mathbf{K}^\dagger$ sur cette base, en construisant la matrice $\hat{\mathbf{H}}$ telle que :

$$\hat{H}_{k,k'} = \langle \mathbf{V}_k | \mathbf{H} | \mathbf{V}_{k'} \rangle = \sum_{p,p'} \sum_{l,l'} \sum_{i,i'} \alpha_l^{(k)} \alpha_{l'}^{(k')} \frac{\partial_{(p,p')} F(0,0)}{p! p'!} (\sigma Z^{(i)})^{p+l} (\sigma Z^{(i')})^{p'+l'} \quad (4.19)$$

$$(k,k') \in [0, N-1]^2, (i,j) \in [1, N]^2, 0 \leq l \leq k, 0 \leq l' \leq k', (p,q) \in [0, N-1]^2, (p+q) \leq N-1$$

Si l'ensemble des vecteurs \mathbf{V}_k est la base des vecteurs propres alors $\hat{\mathbf{H}}$ doit être diagonale.

Or le développement de $\hat{\mathbf{H}}$ à l'ordre 2 en σ calculé par ordinateur s'écrit:

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & 0 & \hat{H}_{13} \\ 0 & \hat{H}_{22} & 0 \\ \hat{H}_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} + o\left(\frac{\sigma^4}{L^4}\right) \quad (4.20)$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{H}_{11} &= N^2 - \frac{d^2 k^2 N^2 \sigma^2}{12L^2} + \frac{d^4 k^2 N^2 \sigma^2}{80L^4} \\ \hat{H}_{22} &= \frac{d^2 k^2 N^2 \sigma^2}{12L^2} - \frac{d^4 k^2 N^2 \sigma^2}{80L^4} \\ \hat{H}_{31} &= \frac{-\sqrt{2}d^2 k^2 N^2 \sigma^2}{24L^2} \left(1 - \frac{3d^2}{20L^2}\right) - i \frac{\sqrt{2}k N^2 \sigma^2}{2L} \left(1 - \frac{d^2}{8L^3}\right) = \bar{\hat{H}}_{13}\end{aligned}$$

Cette matrice n'est manifestement pas diagonale. Il est important de noter ici que pour avoir une formulation analytique exacte à l'ordre 2 pour Λ_0 et Λ_1 , il est nécessaire de calculer cette matrice 3x3. Cependant si on ne cherche à avoir qu'une approximation du rapport Λ_1 / Λ_0 , on peut se limiter à une formulation analytique à l'ordre 0 pour Λ_0 et à l'ordre 2 pour Λ_1 , en omettant les termes contenus dans la troisième ligne et la troisième colonne. Dans ce cas, on peut écrire le premier vecteur propre \mathbf{V}_{p0} dans la base des \mathbf{V}_k sous la forme :

$$\mathbf{V}_{p0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

alors on a la relation :

$$\mathbf{H}\mathbf{V}_{p0} = \begin{bmatrix} H_{11} + \epsilon H_{13} \\ 0 \\ H_{13} \end{bmatrix} = \Lambda_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

qui se transforme en une équation du second degré en Λ_0 dont la solution au premier ordre est :

$$\Lambda_0 = \frac{H_{11} \pm \sqrt{H_{11}^2 + 4H_{13}^2}}{2} \sim N^2 \quad (4.23)$$

On a alors :

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} = \frac{\hat{H}_{22}}{N^2 + \text{terme d'ordre 2}} \approx \frac{\hat{H}_{22}}{N^2} \quad (4.24)$$

Pour raison de symétrie, ceci n'est vrai que pour les 2 premières valeurs propres et dans une certaine limite de la perturbation. Dès que les termes anti-diagonaux deviennent non négligeables, il faut prendre en compte tous les termes anti-diagonaux de même symétrie. Enfin la diagonalisation de cette matrice va nous permettre de retrouver les valeurs propres exactes en même temps que les vecteurs propres qui sont égaux au moins à l'ordre 0 aux V_k . Rappelons que si les valeurs propres sont de valuation croissante en σ (et donc d'ordre de grandeur décroissants), les vecteurs propres eux, étant normalisés, sont tous du même ordre.

Pour calculer la troisième valeur propre, il est nécessaire de développer à l'ordre 4 ce qui donne une matrice 5x5 de la forme suivante:

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \text{ordre 0} & & \text{ordre 2} & & \text{ordre 4} \\ \begin{matrix} H_{11} & 0 & H_{13} & 0 & H_{15} \\ 0 & H_{22} & 0 & H_{24} & 0 \\ H_{31} & 0 & H_{33} & 0 & 0 \\ 0 & H_{42} & 0 & 0 & 0 \\ H_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} + o\left(\frac{\sigma^6}{L^6}\right) \quad (4.25)$$

Pour plus de clarté, nous avons surligné les termes de même parité de la même couleur : en bleu les termes de parité paire ou symétriques et en rouge les termes de parité impaire ou antisymétriques. La parité d'un terme étant déterminée par la parité des vecteurs propres.

Les termes de chaque anti-diagonale sont tous du même ordre. Il est important de noter ici que comme précédemment, on ne peut pas négliger les termes autres que \hat{H}_{33} présents sur la troisième anti-diagonale et ne prendre qu'une matrice de dimension 3x3 pour calculer la troisième valeur propre. Autrement nous ferions une erreur sur le premier ordre de cette valeur propre non nul.

Cependant, on voit qu'il n'y a pas de couplage entre les vecteurs propres approchés impairs et les vecteurs propres approchés pairs. Cette propriété a pour origine la symétrie suivant l'axe du réseau de transducteur. Ainsi les termes \hat{H}_{15} et \hat{H}_{51} sont d'ordre 4 et ayant la même symétrie que \hat{H}_{33} participent pleinement au calcul de Λ_3 par contre, les

termes \hat{H}_{24} et \hat{H}_{42} sont des termes antisymétriques, ils entreront donc dans le calcul des termes d'ordre 4 de Λ_2 .

En considérant que $d \ll L$ (hypothèse paraxiale), les termes dominants des éléments non-nuls de la matrice $\hat{\mathbf{H}}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{11} &\simeq N^2 \\
 \hat{H}_{13} &\simeq -\frac{\sqrt{2}d^2N^2k^2\sigma^2}{24L^2} \\
 \hat{H}_{15} &\simeq \frac{\sqrt{6}N^2k^2\sigma^4}{4L^2} \\
 \hat{H}_{22} &\simeq \frac{d^2N^2k^2\sigma^2}{12L^2} \\
 \hat{H}_{42} &\simeq -\frac{\sqrt{6}d^4N^2k^4\sigma^4}{480L^4} \\
 \hat{H}_{33} &\simeq \frac{N^2k^2\sigma^4}{2L^2}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

En diagonalisant la matrice $\hat{\mathbf{H}}$, on trouve à l'ordre 4 en σ :

	Valeurs propres
Λ_0	$N^2 + \sigma^2 \left(-\frac{d^2N^2k^2}{12L^2} \right) + \sigma^4 \left(\frac{d^2N^2k^2}{4L^4} + \frac{7d^4N^2k^4}{720L^4} \right)$
Λ_1	$\sigma^2 \left(\frac{d^2N^2k^2}{12L^2} \right) + \sigma^4 \left(\frac{d^4N^2k^4}{80L^4} - \frac{d^2N^2k^2}{4L^4} \right)$
Λ_2	$\sigma^4 \left(\frac{d^4N^2k^4}{360L^4} \right)$

Tab.1 Expressions analytique à l'ordre 4 des valeurs propres de $\hat{\mathbf{H}}$.

Nous avons développé une méthode itérative pour calculer les valeurs propres sans surcharger inutilement la mémoire de l'ordinateur faisant les calculs. Cette méthode se base sur trois propriétés de la matrice $\hat{\mathbf{H}}$, dont deux ont été énoncées et discutées précédemment:

- 1) les termes symétriques et antisymétriques de $\hat{\mathbf{H}}$ sont indépendants pour le calcul des valeurs propres,
- 2) la valuation en σ des premiers termes des valeurs propres croît quand le rang de la valeur propre augmente,
- 3) comme on peut s'en rendre compte sur la figure 4.11 ou en lisant le tableau 1, la somme des valeurs propres est égale à N^2 , soit la valeur de la première valeur propre non perturbée. En effet, la perturbation ne venant que du simple fait de bouger la cible (et non de l'augmentation du bruit ou d'un terme de réverbération comme c'est souvent le cas en acoustique sous-marine), il n'y a pas de raison que la trace de la matrice change. Ainsi la trace des matrices \mathbf{H} et $\hat{\mathbf{H}}$ doit être conservée quelle que soit la valeur de σ .

La première propriété nous permet de diviser le système en deux sous-problèmes. Ensuite, on utilise la deuxième propriété pour calculer le polynôme caractéristique de chaque matrice de manière itérative suivant l'ordre de σ . On utilise ensuite la troisième propriété pour vérifier nos calculs.

L'expression des valeurs propres à l'ordre 6 utilisée pour la comparaison à l'expérience est donnée en annexe.

Dans le développement des valeurs propres, on n'a gardé que les termes en d et L de puissance inférieure ou égale à celle de σ . En effet, ce résultat est obtenu à partir d'un double développement limité, le premier sur la variable d et le second sur σ . Les développements limités donnés par le logiciel de calcul comportent de nombreux termes négligeables avec les bonnes approximations. Ici nous nous sommes placés dans le cadre de l'approximation paraxiale et dans le cas où l'ouverture du réseau d est supérieure d'au moins un ordre de grandeur à σ . Soit $L \gg d \gg \sigma$.

2.2.3. Validation numérique et expérimentale

La configuration utilisée numériquement et expérimentalement est la même qu'en section 2.2.1 (figure 4.5).

- **Résultats numériques**

Les résultats suivants sont obtenus grâce à un calcul numérique simple en espace libre dans un milieu homogène de même célérité et densité que l'eau utilisant la fonction de Green monochromatique en eau libre. Pour correspondre aux résultats des expériences réalisées en cuve, la matrice \mathbf{K} est calculée en utilisant l'Eq.(4.13) à la fréquence $f=3,39$ MHz. De même, la cible considérée est ponctuelle et située à 136 mm de l'antenne. On a simulé ici la matrice \mathbf{K} (et non l'Opérateur de Retournement Temporel \mathbf{H}) car en pratique, on mesure d'abord la matrice de transfert \mathbf{K} et les valeurs singulières de cette dernière étant les racines carrées des valeurs propres de \mathbf{H} , on calcule rarement la matrice \mathbf{H} .

Comme on peut le voir clairement sur la figure 4.10, les valeurs singulières de la matrice \mathbf{K} suivent bien des lois en σ , σ^2 ,... σ^N . Ceci est bien mis en évidence sur la représentation en échelle log/log.

De plus, il est intéressant de remarquer que la deuxième valeur singulière ne suit plus la loi en σ dès que la quatrième valeur singulière (en σ^3) commence à émerger du bruit. Ceci est cohérent avec ce que prédit la théorie : le couplage entre les vecteurs de l'Eq.(4.18) n'apparaît que pour les vecteurs de parité identiques. De la même façon, on peut vérifier ce phénomène pour la première et la troisième valeur singulière sur la figure 4.9 où les valeurs singulières ne sont pas normalisées par V_{p0} pour tous les σ , mais seulement normalisées par la réflectivité apparente de la cible (V_{p0} en $\sigma=0$). On peut voir aussi que dès que l'écart type dépasse la valeur de la cellule de résolution, on se rapproche d'une situation où on a un continuum de valeurs propres.

La figure 4.10 montre que les expressions analytiques que nous avons établies sont en très bonne adéquation avec les simulations, notamment le calcul de la seconde valeur singulière à l'ordre 3 (équivalent à l'ordre 6 pour les valeurs propres) permet de prédire avec une très bonne précision l'évolution de celle-ci pour une perturbation allant jusqu'à 0,8 mm.

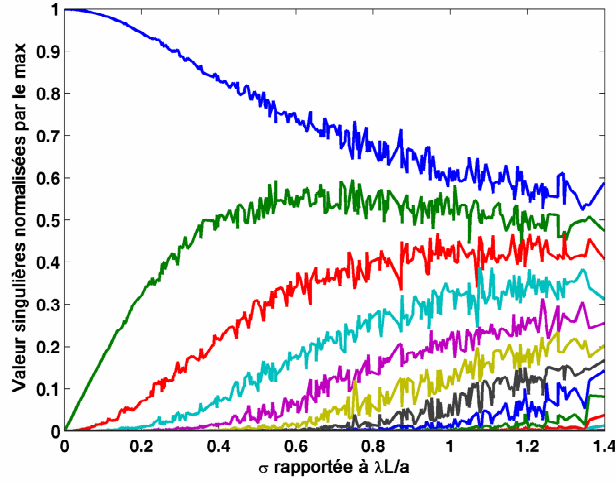


Fig.4.9 Tracé en échelle linéaire des 10 premières valeurs singulières simulées pour une acquisition de K colonne par colonne. Les valeurs singulières sont normalisées par Λ_0 à $\sigma=0$.

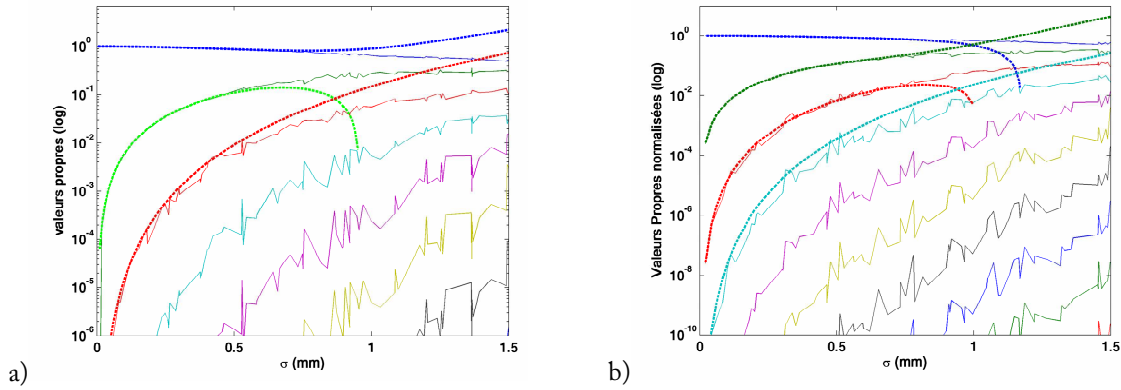


Fig.4.10 Comparaison des valeurs singulières simulées en trait plein aux expressions analytiques a) à l'ordre 2 et b) à l'ordre 3 en pointillés.

• Résultats expérimentaux

Les paramètres expérimentaux sont les mêmes que ceux utilisés dans l'étude numérique. De plus, la cible est un fil d'alumel de 0,1 mm de diamètre considéré comme ponctuel. La séparation des valeurs singulières selon les valuations successives est confirmée expérimentalement sur la figure 4.11 et les courbes sont comparées aux expressions analytiques sur la figure 4.12.

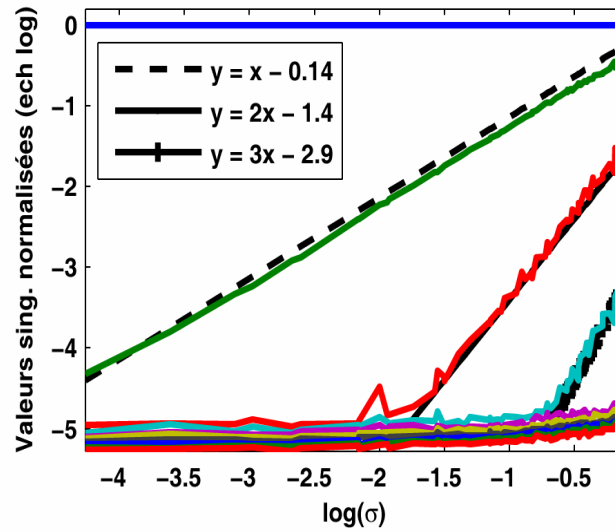


Fig.4.11 Tracé en échelle log/log des 10 premières valeurs singulières expérimentales normalisées par la première valeur singulière. La fréquence d'acquisition est $f=3.39$ MHz, $L=136$ mm, $d=26$ mm et $N=62$.

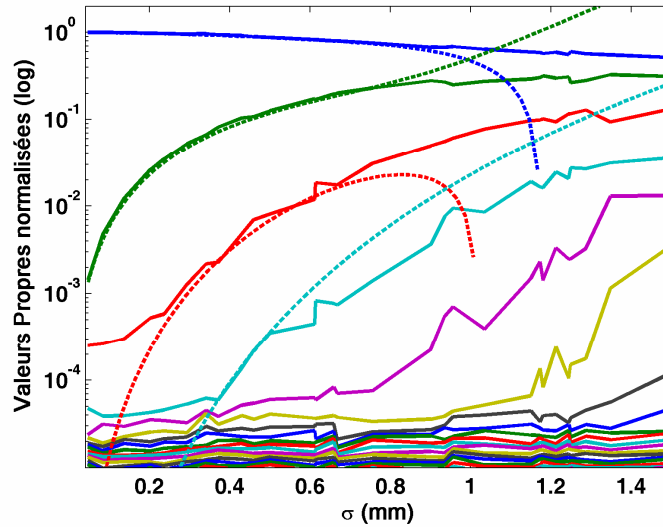


Fig.4.12 Comparaison des valeurs singulières expérimentales (traits pleins) aux expressions analytiques à l'ordre 3 (traits pointillés).

La figure 4.12 montre un accord excellent entre expérience et expression analytique des valeurs propres de l'ORT. Pour des petites valeurs de σ , l'expérience est limitée par rapport aux courbes simulées par un niveau de bruit non négligeable notamment pour la troisième valeur singulière (ici tracée en rouge). Cependant, son adéquation avec la

théorie reste remarquable. Ces expressions vont nous permettre de connaître précisément le nombre de valeurs singulières auquel s'attendre lorsque l'on effectue une expérience DORT sur une cible dont les caractéristiques moyennes du mouvement sont connues ou au contraire de remonter à ces caractéristiques moyennes si on peut associer de manière sûre les valeurs singulières à la cible (par une repropagation des vecteurs propres dans un modèle numérique par exemple comme il a été montré dans le chapitre sur la caractérisation).

De plus, l'expression des vecteurs propres nous apporte une information quantitative très précise sur le déplacement de la cible comme nous allons le voir dans la section suivante.

IV.2.3. Utilisation des vecteurs singuliers pour retrouver le parcours de la cible

La section précédente s'est focalisée sur l'étude des valeurs singulières d'une cible en mouvement. Nous allons maintenant nous intéresser de plus près à l'étude des deux premiers vecteurs propres tout d'abord en émission puis en réception.

2.3.1. Vecteur propre en émission

En effet, un problème important dans le domaine de l'acoustique sous-marine est le suivi de cible en mouvement (*tracking* en anglais) et jusqu'à présent nous n'avons pu extraire de la donnée de la valeur propre qu'une estimation de l'écart type de ce mouvement. De nombreuses recherches ont été conduites dans ce domaine, notamment dans l'utilisation de traitements de champ adaptés (*match-field processing*) plus ou moins avancés^[18-21]. Cependant ces techniques dépendent grandement de l'exactitude du modèle utilisé pour calculer la réplique du champ auquel on va comparer les données expérimentales et les plus sophistiqués demandent des puissances de calculs importantes. Dans la suite, nous allons voir qu'il est possible de retrouver exactement le parcours de la cible sans aucune connaissance du milieu dans lequel a lieu l'expérience.

Selon le tableau 1, si le déplacement de la cible est à moyenne nulle et tant que H_{42} est négligeable devant H_{22} , la seconde valeur singulière s'écrit :

$$\Sigma_1 = \sqrt{\Lambda_1} = \frac{kdN\sigma}{2\sqrt{3}L} \quad (4.27)$$

et

$$(Vp_1)_j = \frac{\sigma Z^{(j)} - \sum_i \frac{\sigma Z^{(i)}}{N}}{\sqrt{N}\sigma} = \frac{Z^{(j)}}{\sqrt{N}} \quad (4.28)$$

Une application originale de ce résultat est de retrouver les positions de la cible pendant l'acquisition DORT par la formule⁸ :

$$\sigma Z^{(j)} = \sqrt{N} \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0} \frac{2\sqrt{3}L}{kd} (Vp_1)_j \quad (4.29)$$

Nous avons utilisé le résultat de l'Eq.(28) pour retrouver le déplacement de la cible et ensuite trouver la vitesse d'une cible en mouvement.

Le second vecteur singulier est censé être réel avec ses composants définis par l'Eq.(27).

En fait, $(Vp_1)_j = \frac{Z^{(j)}}{\sqrt{N}} e^{-jkR}$, il faut donc corriger Vp_1 en allant chercher la loi de phase e^{jkR} dans le vecteur Up_0 qui lui a priori n'est pas affecté par le déplacement de la cible. On obtient en principe un vecteur réel mais cependant, en pratique, on trouve un vecteur singulier complexe ayant une partie imaginaire faible mais non nulle. La figure 4.13 montre la comparaison entre le déplacement réel enregistré lors de l'acquisition et le déplacement calculé à partir de l'Eq.28 et de la partie réelle des éléments de Vp_1 .

⁸ Les valeurs propres étant multipliée par la réflectivité de la cible, en pratique, on a besoin d'utiliser la définition du premier vecteur propre au premier ordre $\Sigma_0 = N \times S(0)$ pour s'affranchir de la réflectivité apparente $S(0)$ de la cible.

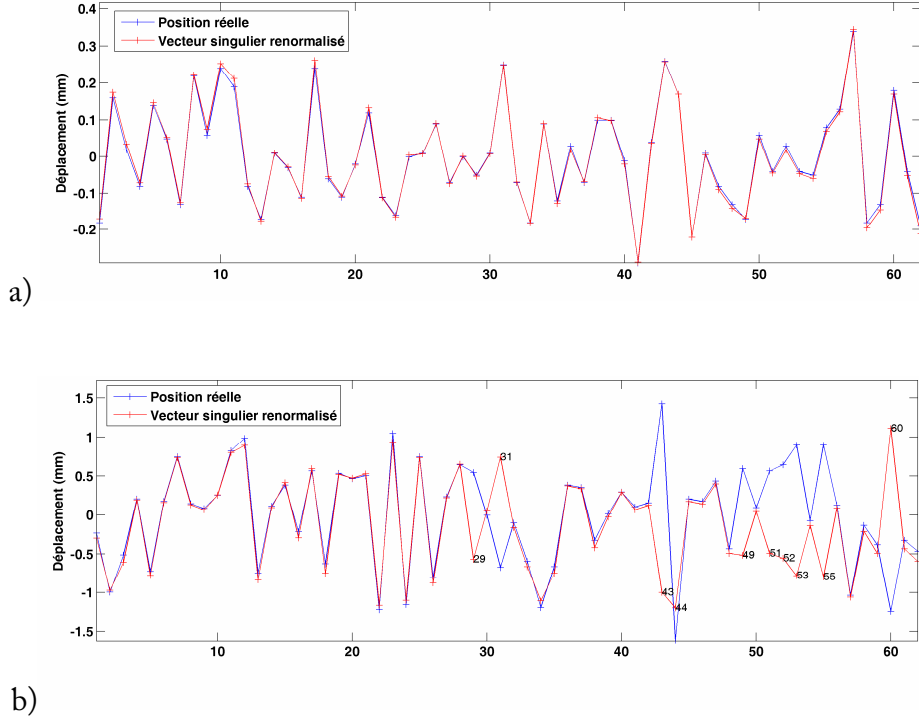


Fig.4.13 Résultats expérimentaux de détection du mouvement de la cible pendant l'acquisition DORT. On trace en bleu le déplacement réel de la cible et en rouge le déplacement calculé à partir de \mathbf{V}_{p1} pour a) $\sigma=0.14$, b) $\sigma=0.66$.

Comme on put le voir pour des petites valeurs de σ , l'accord entre le déplacement calculé et la réalité est très bon. Par contre lorsque σ augmente, il est difficile de compenser la phase non nulle de \mathbf{V}_{p1} . Pour $\sigma > 0.6$ mm qui est la valeur où la quatrième valeur singulière devient non négligeable, la phase devient trop dispersée et on a une incertitude sur le signe de la partie réelle des éléments de \mathbf{V}_{p1} et donc du déplacement. Le modèle proposé n'est plus utilisable pour calculer le déplacement relatif de la cible même si on en a le déplacement absolu.

Pour estimer l'erreur sur les $\sigma Z^{(i)}$ que l'on fait en choisissant au premier ordre la base des \mathbf{V}_{p_i} comme vecteur propres, on trace l'écart-type de l'erreur que l'on fait sur les positions estimées par rapport aux vraies positions en fonction de σ et la valeur de $\hat{H}_{42} / \hat{H}_{22}$, on voit que l'erreur que l'on fait sur les positions est proportionnelle au terme de couplage (voir figure 4.14).

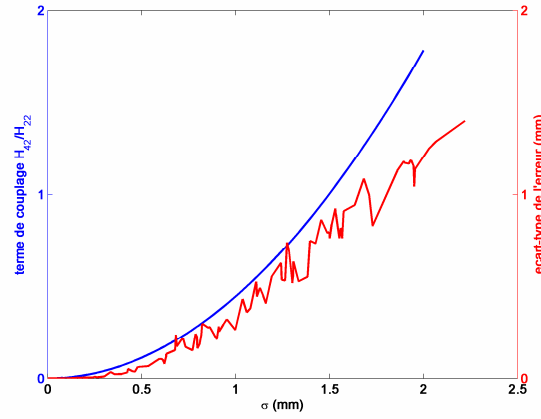


Fig.4.14 Comparaison entre le terme de couplage H_{42}/H_{22} et l'écart-type de l'erreur produite quand on calcule la position de la cible avec le vecteur V_1 en simulation.

Cette technique reste valable pour un mouvement déterministe. Une application de cette technique pourrait être le suivi d'un sous-marin se déplaçant parallèlement à un réseau d'émetteur/récepteurs horizontal. Dans le cas le plus simple, si la vitesse de la cible est constante égale à V_c pendant l'acquisition, la vitesse de la cible peut être facilement extraite de σ . En effet, dans ce cas si on utilise une cadence de tir uniforme, le déplacement est directement proportionnel à j : $Z^{(j)} = jV_c$ et $\sigma = V_c \times \sqrt{\sum_{j=1}^N \frac{j^2}{N} - \left(\sum_{j=1}^N \frac{j}{N}\right)^2}$.

Cependant, si le déplacement le plus grand de la cible dépasse la cellule de résolution, la formule pour extraire σ n'est plus valable comme le montre la figure 4.15, on aura donc intérêt à utiliser une cadence de tir élevée, voire une méthode d'acquisition telle que l'utilisation d'émissions instantanées (cf. chapitre II).

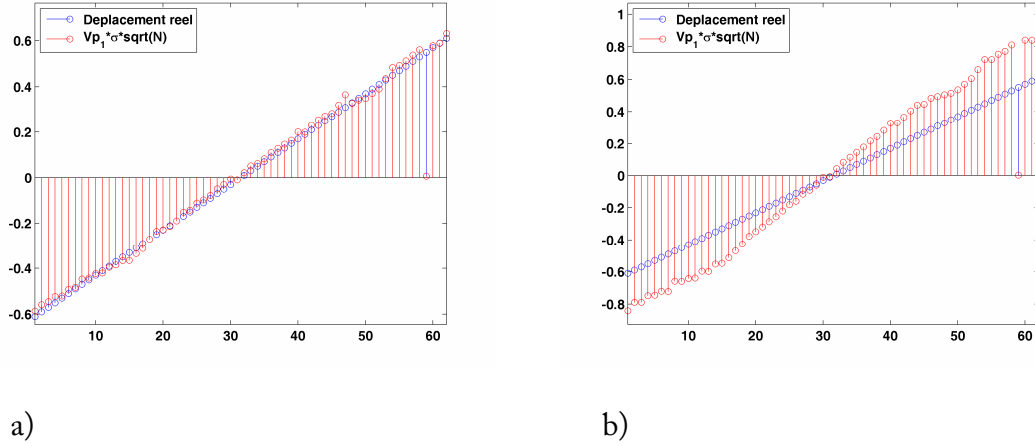


Fig.4.15 Résultats expérimentaux pour le déplacement réel et déplacement calculé à partir de V_{p1} corrigé pour une vitesse de a) $V_c=0.02$ mm b) $V_c=0.03$ mm. (la voie n°59 est défaillante)

2.3.2. Vecteurs propres en réception

La réception du champ rétrodiffusé se faisant sur tout le réseau en même temps pour chaque émission, la forme des vecteurs propres en réception n'est pas du tout la même que celle des vecteurs en émission notamment on peut montrer que l'amplitude de ces vecteurs ne prend pas en compte le déplacement de la cible. En effet, l'expression de ces vecteurs est extraite de la diagonalisation de $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} (\tilde{K}^* \tilde{K})_{ij} &= \frac{1}{(4\pi L)^4} \sum_{m=1}^N e^{-ik(|M_i S^{(i)}| + |M_i S^{(m)}|)} e^{ik(|M_j S^{(m)}| + |M_j S^{(j)}|)} \\ &= \frac{1}{(4\pi L)^4} e^{ik(-|M_i S^{(i)}| + |M_j S^{(j)}|)} \sum_{m=1}^N e^{ik(-|M_i S^{(m)}| + |M_j S^{(m)}|)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

En corrigeant la phase des vecteurs propres comme dans la section 2.2.2 et en utilisant la loi des grands nombres, on peut se ramener à l'expression suivante :

$$(\tilde{K}^* \tilde{K})_{ij} = \frac{N}{(4\pi L)^4} e^{\frac{k^2 \sigma^2 (z_j - z_i)^2}{2L^2}} \quad (4.31)$$

qui ne dépend plus des $Z^{(i)}$ mais que de σ . Les figures 4.16 et 4.17 montrent l'amplitude des 6 premiers vecteurs singuliers en réception pour 2 valeurs de σ différentes, on retrouve bien les polynômes de Legendre de la variable z_i (la position du transducteur).

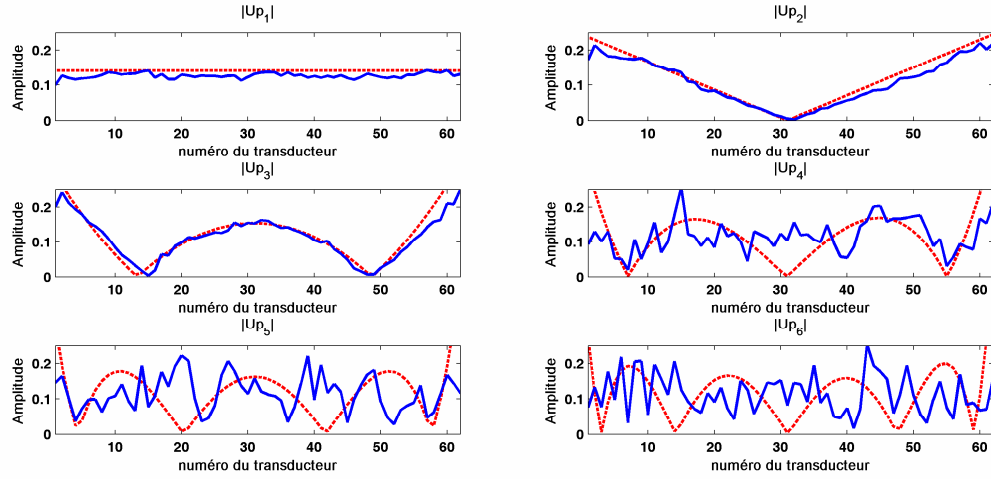


Fig.4.16 Amplitude des vecteurs Up_i expérimentaux de 1 à 6 pour $\sigma=0.29$ mm (en bleu) comparés aux polynômes de Legendre théoriques (en rouge). On voit sur la figure 4.12 que la quatrième valeur propre ne ressort pas encore du bruit et donc le vecteur propre ne correspond pas au polynôme de Legendre d'ordre 3.

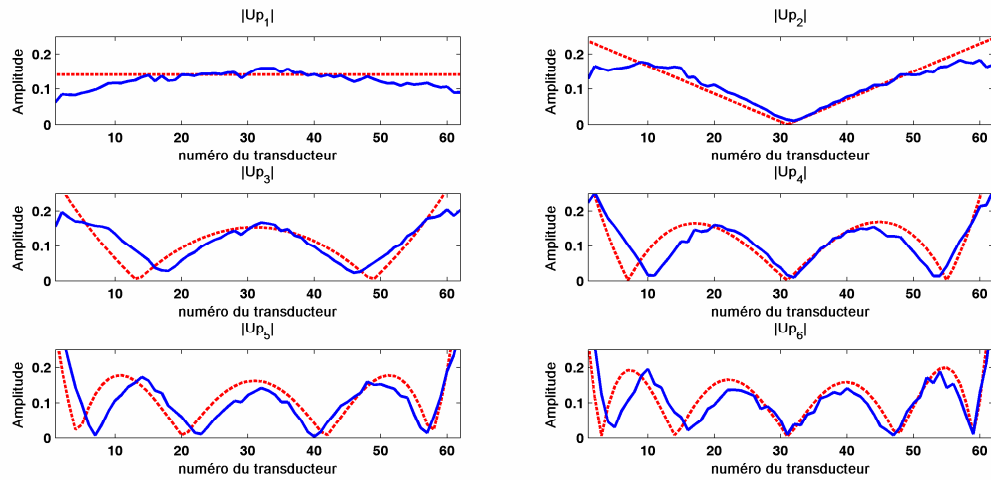


Fig.4.17 Amplitude des vecteurs Up_i expérimentaux de 1 à 6 pour $\sigma=1.21$ mm. Ici les 6 valeurs propres sur la Fig. 4. 12 sont au-dessus du bruit et donc les 6 vecteurs propres sont les polynômes de Legendre.

IV.3. Cible mobile en guide d'onde

Dans la section précédente, nous nous sommes intéressés aux valeurs propres et vecteurs propres en eau libre d'une cible animée d'un mouvement parallèle au réseau pendant l'acquisition DORT. Nous avons donné une expression analytique exacte à l'ordre voulu pour les valeurs propres et une estimation à l'ordre zéro des vecteurs propres correspondants. Toujours dans l'optique d'expliquer le comportement des valeurs propres dans un guide d'onde avec vagues, nous allons augmenter la complexité du modèle précédent en nous intéressant au cas d'une cible en mouvement dans un guide d'onde.

IV.3.1. Géométrie de l'acquisition

La géométrie du modèle proposé est décrite figure 4.18. Une cible est placée au milieu d'un guide de Pekeris de densité ρ_0 et de célérité c_0 avec un fond de densité $\rho_b > \rho_0$ et de célérité $c_b > c_0$. Un réseau de N transducteurs est placé à une distance L de la cible. Les émetteurs-récepteurs du réseau sont disposés de manière uniforme sur la hauteur du guide et on considère qu'ils sont espacés de façon à échantillonner suffisamment bien le champ acoustique retrodiffusé par la cible. Le guide est symétrique par rotation d'axe parallèle au réseau.

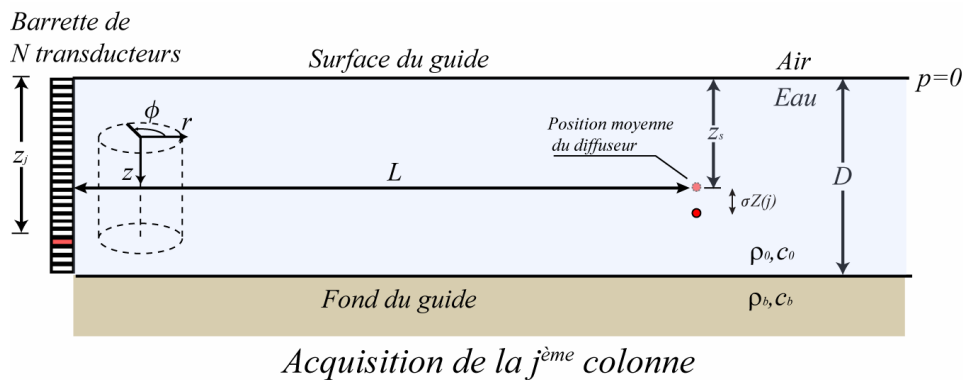


Fig.4.18 Géométrie pour une cible mobile en guide d'onde.

IV.3.2. Ecriture de l'Opérateur de Retournement Temporel

On considère un réseau de N transducteurs dans un guide de hauteur d (idéalement échantillonné), dont les positions M_j sont $(z_j, 0, 0)$ avec les z_j uniformément répartis sur la hauteur du guide. Ces transducteurs tirent tout à tour sur une cible située en un point voisin de $S = (L, 0, z_s)$. Cette cible bouge. On ne considère que le modèle d'acquisition « colonne par colonne » pour la description des fluctuations de la position de la cible.

On effectue N acquisitions pendant lesquelles le transducteur j émet et tous les transducteurs enregistrent, pour j allant de 1 à N . La cible bouge tout le temps, sa position pendant expérience j est

$$S^{(j)} = S + \sigma(0, 0, Z^{(j)}) = (L, 0, z_s + \sigma Z^{(j)}) \quad (4.32)$$

où les $Z^{(j)}$ sont des variables indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne 0 et d'écart type 1. En utilisant le formalisme de la décomposition en modes normaux, le champ de pression sur le transducteur à la profondeur z_i provenant d'une source en $z_s + \sigma Z^{(j)}$ à la distance L s'écrit :

$$p(L, z_i, z_s + \sigma Z^{(j)}) = P_0 \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_i) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(j)}) e^{ik_m L}}{\sqrt{k_{rm}}} \quad (4.33)$$

$$\text{avec } P_0 = \frac{ie^{-i\pi/4}}{\rho(z_0)\sqrt{8\pi}}$$

Afin de faciliter la lecture des équations, on omet P_0 et la matrice de transfert s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{il} &= \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_i) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(i)}) e^{ik_m L}}{\sqrt{k_{rm}}} \times \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_l) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(i)}) e^{ik_m L}}{\sqrt{k_{rm}}} \\ \mathbf{K}_{lj} &= \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_l) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(j)}) e^{ik_m L}}{\sqrt{k_{rm}}} \times \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_j) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(j)}) e^{ik_m L}}{\sqrt{k_{rm}}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Le calcul du développement limité de $\mathbf{H} = \mathbf{K}\mathbf{K}^\dagger$ est reporté en annexe pour plus de clarté. La matrice \mathbf{H} se décompose en 2 matrices. On note \mathbf{A} le terme d'ordre 0 et \mathbf{B} le terme d'ordre 2 :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2\delta k_0} [\mathbf{A} + \mathbf{B}] \quad (4.35)$$

Comme on l'a vu dans la section précédente, à l'ordre 0, la valeur propre est simplement donnée par une cible ponctuelle immobile. En réutilisant les mêmes notations que dans le chapitre III et en prenant en compte le fait que \mathbf{A} est le seul terme d'ordre 0, on peut déjà en déduire que la première valeur propre à l'ordre zéro de \mathbf{H} est

$$\Lambda_0 = \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \|\mathbf{V}_{\text{moy}}\|^2 = \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right]^2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{V}_0 = \frac{\mathbf{V}_{\text{moy}}}{\|\mathbf{V}_{\text{moy}}\|} \quad \text{comme vecteur propre (voir annexe).}$$

L'expression de \mathbf{H} est trop compliquée pour pouvoir utiliser les mêmes méthodes que dans la section précédente et ainsi avoir une expression analytique exacte des valeurs propres et des vecteurs propres. On est obligé de passer par une hypothèse sur les vecteurs propres qui se fonde sur les résultats empiriques. De plus, nous calculons Λ_1 / Λ_0 ce qui nous permet de ne prendre en compte que l'ordre 0 de Λ_0 et l'ordre 2 de Λ_1 .

Nous voulons démontrer que le second vecteur propre s'écrit de la façon suivante :

$(V_1)_j = (V_0)_j \frac{Z^{(j)}}{\sqrt{N}}$. Cette proposition provient d'observations expérimentales et est en accord avec les résultats de la section 2.2. Pour que \mathbf{V}_1 soit vecteur propre de \mathbf{H} , il faut que \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_0 soient orthogonaux, ce qui est vrai par construction, et il faut donc démontrer que $\mathbf{B}\mathbf{V}_1 = \Lambda_1 \mathbf{V}_1$.

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}\mathbf{V}_1]_i &= \sum_j \left[-\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 (V_{\text{moy}})_i}{\partial z^2} \right] Z^{(i)2} \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[(V_{\text{moy}})_j^* (V_1)_j \right] + \\ &\sum_j \left[(V_{\text{moy}})_i \right] \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[-\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 (V_{\text{moy}})_j^*}{\partial z^2} \right] Z^{(j)2} (V_1)_j - \\ &\sum_j \left[(V_{\text{moy}})_i \right] \frac{\pi^2 \sigma^2}{2d^2} \left[(Z^{(i)} - Z^{(j)})^2 \left[-\frac{1}{12} M + \frac{1}{3} M^3 \right] - (Z^{(i)} + Z^{(j)})^2 g\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[(V_{\text{moy}})_j^* (V_1)_j \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{BV}_1]_i &= \left[-\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 (V_{moy})_i}{\partial z^2} \right] Z^{(i)2} \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \frac{\sum_j |(V_{moy})_j|^2 \frac{Z^{(j)}}{\sqrt{N}}}{\|\mathbf{V}_{moy}\|} + \\
 & \left[(V_{moy})_i \right] \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[-\frac{\sigma^2}{2} \right] \frac{\sum_j \frac{\partial^2 (V_{moy})_j^*}{\partial z^2} (V_{moy})_j \frac{(Z^{(j)})^3}{\sqrt{N}}}{\|\mathbf{V}_{moy}\|} - \\
 & \left[(V_{moy})_i \right] \sum_j \frac{\pi^2 \sigma^2}{2d^2} \left[(Z^{(i)} - Z^{(j)})^2 \left[-\frac{1}{12}M + \frac{1}{3}M^3 \right] - (Z^{(i)} + Z^{(j)})^2 g\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[\frac{|(V_{moy})_j|^2 \frac{Z^{(j)}}{\sqrt{N}}}{\|\mathbf{V}_{moy}\|} \right]
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

or les variables $(V_{moy})_j$ sont déterminées et décorréliées des variables $Z^{(j)}$ qui sont aléatoires, on a donc :

$$\sum_j |(V_{moy})_j|^2 \frac{Z^{(j)}}{\sqrt{N}} = \sqrt{N} \langle Z^{(j)} \rangle \sum_j |(V_{moy})_j|^2 = 0 \tag{4.38}$$

et

$$\sum_j \frac{\partial^2 (V_{moy})_j^*}{\partial z^2} (V_{moy})_j \frac{(Z^{(j)})^3}{\sqrt{N}} = \sqrt{N} \langle (Z^{(j)})^3 \rangle \sum_j \frac{\partial^2 (V_{moy})_j^*}{\partial z^2} (V_{moy})_j = 0 \tag{4.39}$$

d'où

$$\mathbf{BV}_1 = (V_{moy})_i \sum_j \frac{\pi^2 \sigma^2}{2d^2} \left[(Z^{(i)} - Z^{(j)})^2 \left[-\frac{1}{12}M + \frac{1}{3}M^3 \right] - (Z^{(i)} + Z^{(j)})^2 g\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[\frac{|(V_{moy})_j|^2 \frac{Z^{(j)}}{\sqrt{N}}}{\|\mathbf{V}_{moy}\|} \right] \tag{4.40}$$

De la même façon, en développant les carrés, on va retrouver des termes en $Z^{(j)}$ à la puissance 1, 2 et 3 et les termes de puissance impaire s'annulent :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}\mathbf{V}_1 &= (V_{moy})_i \sqrt{N} \left\langle \frac{\pi^2 \sigma^2}{2d^2} \left[(2Z^{(i)}Z^{(j)2}) \left[-\frac{1}{12}M + \frac{1}{3}M^3 \right] + (2Z^{(i)}Z^{(j)2})g\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \right\rangle \|\mathbf{V}_{moy}\| \\
 &= \left[\frac{(V_{moy})_i}{\|\mathbf{V}_{moy}\|} \frac{Z^{(i)}}{\sqrt{N}} \right] \|\mathbf{V}_{moy}\|^2 N \underbrace{\langle Z^{(j)2} \rangle}_{=N} \frac{\pi^2 \sigma^2}{d^2} \left[-\frac{1}{12}M + \frac{1}{3}M^3 + g\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

On a donc bien $\mathbf{V}_1 = \frac{\left[(V_{moy})_j \frac{Z^{(j)}}{\sqrt{N}} \right]_{1 \leq j \leq N}}{\|\mathbf{V}_{moy}\|} = \left[(V_0)_j \frac{Z^{(j)}}{\sqrt{N}} \right]_{1 \leq j \leq N}$ vecteur propre de \mathbf{B} avec pour valeur propre:

$$\Lambda_1 = \frac{N^2 \pi^2 \sigma^2}{d^2} \left[-\frac{1}{12}M + \frac{1}{3}M^3 + g\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \|\mathbf{V}_0\|^2. \tag{4.42}$$

IV.3.3. Résultats expérimentaux et simulations

Le dispositif expérimental est présenté dans la figure suivante :

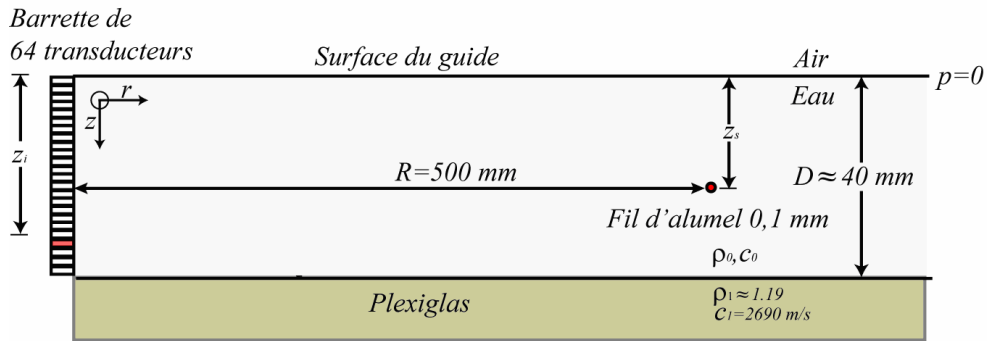


Fig.4.19 Géométrie et paramètres de l'expérience

Dans un soucis de cohérence, les paramètres utilisés dans la simulation sont les mêmes que ceux de l'expérience présentée par la suite. Le nombre de modes utilisés est tiré de l'équation présentée dans le chapitre II sur la caractérisation pour un nombre de réflexion égal à 6. Ce paramètre est tiré des observations des Bscans. Les résultats de

simulation et d'expérience sont comparés avec la valeur de Λ_1 normalisée par la valeur de Λ_0 en $\sigma = 0$, soit :

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0|_{\sigma=0}} = \frac{\pi^2 \sigma^2}{d^2} \left[\frac{-\frac{1}{12}M + \frac{1}{3}M^3 + g(\frac{\pi z_s}{d})}{M - f(\frac{\pi z_s}{d})} \right]. \quad (4.43)$$

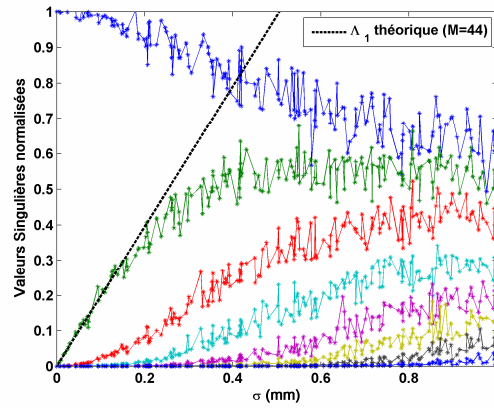


Fig.4.20 Résultats simulés pour une acquisition DORT en guide d'onde. La simulation utilise un code numérique basé sur l'Eq.(31) et les valeurs singulières en fonction de σ sont comparées à l'Eq.(40) pour $M=44$.

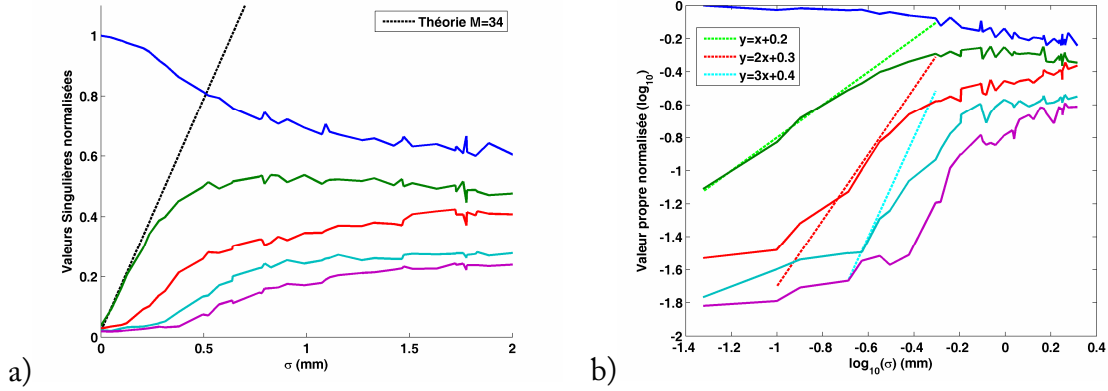


Fig.4.21 Valeurs singulières expérimentales de K en fonction de σ a) en échelle linéaire b) en échelle logarithmique. La deuxième valeur singulière semble bien suivre une loi en σ par contre les troisième et quatrième valeurs singulières sont trop bruitées pour permettre de se prononcer sur la loi d'évolution suivie.

Les figures suivantes montrent la corrélation entre le déplacement de la cible et le rapport des amplitudes des composants des vecteurs propres V_{p1} et V_{p0} de la matrice K .

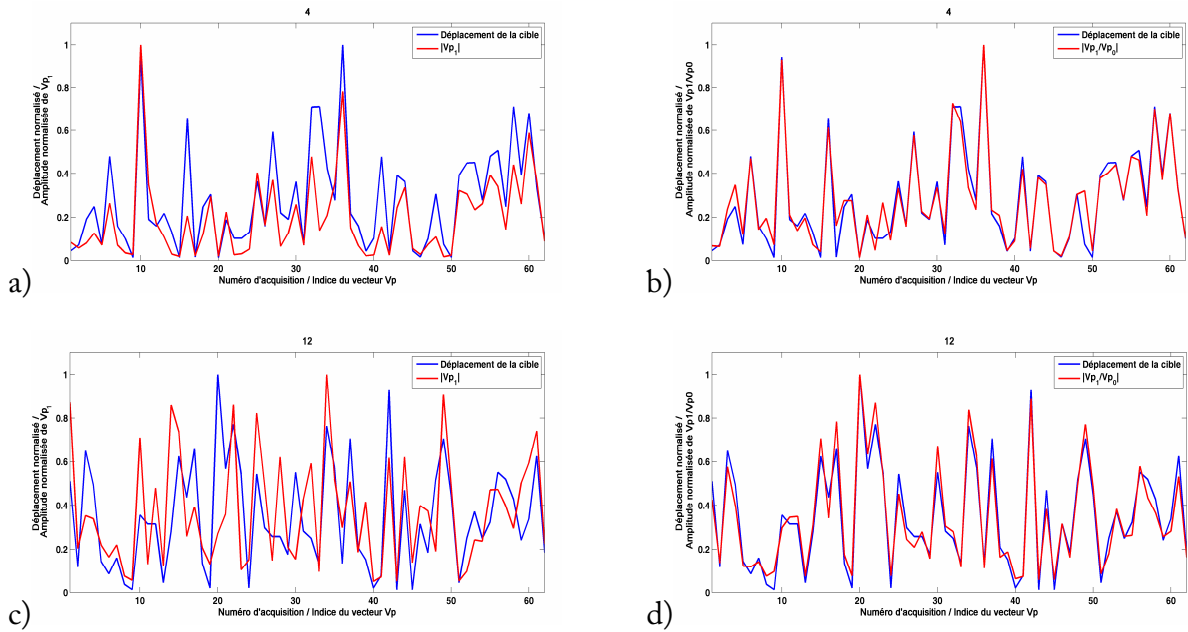


Fig.4.22 Comparaison entre la valeur absolue du déplacement de la cible et a) l'amplitude du vecteur propre d'ordre 1, b) le rapport des amplitudes des 2 premiers vecteurs propres normalisés. a) et b) pour un écart-type de 0.12 mm c) et d) pour un écart-type de 0.52 mm.

On voit bien sur les figures 4.22b et 4.22d la très bonne adéquation entre théorie et expérience. Ainsi grâce à la décomposition en valeurs singulières de l'Opérateur de Retournement Temporel, on peut retrouver le déplacement d'une cible pendant l'acquisition DORT. Il faudra tout de même avoir une estimation du nombre de modes excités dans le guide pour pouvoir extraire σ de la seconde valeur singulière. Un aspect intéressant de la technique pour traquer une cible vient de la limitation liée à la taille de la cellule de résolution. En conséquence, la méthode DORT peut très bien être utilisée dans un premier temps sur une fenêtre d'acquisition longue afin de bénéficier d'une résolution augmentée par le nombre de réflexions pour connaître la position moyenne de la cible et, par la suite, être utilisée sur une fenêtre d'acquisition courte pour se placer dans une configuration où l'approximation faite dans la section 3.2 sera mieux adaptée.

IV.4. Détection en guide d'onde en présence de vagues

Grâce aux résultats présentés dans les sections précédentes, nous allons pouvoir prédire le comportement des valeurs propres de l'ORT dans le cas d'un diffuseur situé dans un guide perturbé par des ondes de surface gravitationnelles. Dans la section 1, nous avons présentés l'évolution des valeurs singulières de la matrice de transfert pour une cible dans un guide dont la surface était animée d'un mouvement sinusoïdal de basse fréquence et de petite amplitude. Nous allons généraliser ici le problème aux cas d'une surface faiblement irrégulière. Ce formalisme peut être utilisé dans le cas d'un guide d'onde marin de type « petit fond » présentant des ondes de surface gravitationnelles mais aussi dans le cas d'un guide d'onde océanique dont les lignes d'isocélérité sont faiblement irrégulières et dépendantes du temps, la condition nécessaire étant l'absence de couplage entre les modes du guide durant la propagation de l'onde.

IV.4.1. Théorie

En effet, le problème de la diffusion d'une onde dans un milieu stratifié faiblement irrégulier a fait l'objet de nombreuses études dans le domaine des micro-ondes dans les années 40^[22,23]. Les développements complets des calculs pour le cas en transmission

peuvent être trouvés dans Tolstoy *et al.* ^[9]. Nous allons ici utiliser les résultats présentés dans cet ouvrage pour les appliquer au cas qui nous intéresse.

Nous allons étendre les résultats de la section 3 au cas d'un diffuseur situé dans un guide dont la surface est légèrement irrégulière et qui change au cours de l'acquisition DORT. Ceci sera possible dans le cas où il n'y pas de couplage entre modes du guide durant la propagation. Cette condition entraîne les trois sous-conditions suivantes :

- 1) Les composantes verticales et horizontales du nombre d'onde à une position donnée correspondent à l'état de surface local.
- 2) L'état de surface varie lentement d'une région locale à une autre.
- 3) Il n'y pas de réflexion ou de diffusion considérable d'énergie d'un mode à un autre dans les régions de transition.

En utilisant encore une fois le formalisme de la décomposition en modes normaux, le champ de pression dans un guide d'onde sur le transducteur à la profondeur z_i provenant d'une source en z_s à la distance L dans un guide immobile s'écrit :

$$p(L, z_i, z_s) = P_0 \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_i) \Psi_m(z_s) e^{ik_m L}}{\sqrt{k_{zm}}} \quad (4.44)$$

$$\text{avec } P_0 = \frac{ie^{-i\pi/4}}{\rho(z_0)\sqrt{8\pi}}$$

Dans la configuration qui nous intéresse, la condition 1) entraîne que $\Psi_m(z)$ satisfait l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial z^2} \Psi_m(z) + k_{zm}^2 \Psi_m(z) = 0$$

pour tout L et donc k_{zm} est une fonction de la position. L'amplitude d'un mode dépend de l'état de surface au niveau de la source qui lui a donné naissance. De manière similaire, le niveau acoustique au niveau du diffuseur dépend de l'état de surface à la position du diffuseur.

De plus, on utilise les résultats présentés dans Tolstoy *et al.* ^[9] pour réécrire le terme de phase du $m^{\text{ième}}$ mode qui dépend de k_{zm} , le nombre d'onde horizontal, qui lui-même

dépend de r d'après la condition 1). Pour calculer ce terme, il faut intégrer k_{rm} sur toute la longueur du guide. Ainsi en prenant en compte la condition 3) et en se plaçant dans l'approximation petits angles, l'Eq.(44) dans le cas du guide d'onde avec vagues s'écrit :

$$p(L, z_i, z_s) = P_0 \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_i, k_{zm}(0)) \Psi_m(z_s, k_{zm}(L)) e^{i \int_0^L k_{rm}(r) dr}}{\sqrt{k_0}} \quad (4.45)$$

En écrivant :

$$k_{rm}(r) = \bar{k}_{rm} + \epsilon_{rm}(r)$$

Avec \bar{k}_{rm} le nombre d'onde horizontal moyen et $\epsilon_{rm}(r)$ la variation du nombre d'onde horizontal à la distance r , l'Eq.(43) devient :

$$p(L, z_i, z_s) = P_0 \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_i, k_{zm}(0)) \Psi_m(z_s, k_{zm}(L)) e^{i\varphi_m}}{\sqrt{k_0}} \quad (4.46)$$

$$\text{avec } \varphi_m = \bar{k}_{rm} L + \int_0^L \epsilon_{rm}(r) dr$$

En considérant une condition aux limites de type Dirichlet à la surface et un fond de densité supérieure à celle du guide et de célérité $c_b > c_0$, on a :

$$\Psi_m(z, k_{zm}(r)) = \sqrt{\frac{2\rho}{h}} \sin(k_{zm}(r)z), \quad k_{zm}(r) = \frac{(m+1/2)\pi}{h(r)}, \quad m \in \mathbb{N} \quad (4.47)$$

Soit h_0 , la profondeur moyenne du guide d'onde, on peut écrire :

$$h(r) = h_0 + \Delta h(r) \quad (4.48)$$

Et l'expression du nombre d'onde vertical pour une variation $\Delta h(r)$ petite devant h_0 devient :

$$\begin{aligned} k_{zm}(r)z &= \frac{(m+1/2)\pi z}{h(r)} \\ &= \frac{(m+1/2)\pi z}{h_0 + \Delta h(r)} \simeq \frac{(m+1/2)\pi z}{h_0} \left(1 - \frac{\Delta h(r)}{h_0}\right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Ce qui équivaut bien à un mouvement vertical de la cible (et de la source) comme nous l'avions suggéré dans la section 1. En reprenant les notations utilisées dans les sections précédentes, on peut donc écrire :

$$p(L, z_i, z_s) = P_0 \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_i + \sigma Z_r^{(i)}) \Psi_m(z_s + \sigma Z_s^{(i)}) e^{i\varphi_m}}{\sqrt{k_0}} \quad (4.50)$$

avec $\sigma Z_r^{(i)} = -z_i \frac{\Delta h_i(r=0)}{h_0}$, $\sigma Z_s^{(i)} = -z_s \frac{\Delta h_i(r=L)}{h_0}$ et Δh_i le déplacement vertical de la surface pendant l'émission i° .

Les calculs de l'Opérateur Retournement Temporel \mathbf{H} qui en découlent sont similaires à ceux présentés en annexe C. L'expression de \mathbf{H} est :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ij} &= \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_i + \sigma Z_r^{(i)}) \Psi_m(z_s + \sigma Z_s^{(i)}) e^{i\varphi_m}}{\sqrt{k_0}} \times M_{ij} \times \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_j + \sigma Z_r^{(j)}) \Psi_m(z_s + \sigma Z_s^{(j)}) e^{-i\varphi_m}}{\sqrt{k_0}} \\ M_{ij} &= \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_s + \sigma Z_s^{(i)}) \Psi_m(z_s + \sigma Z_s^{(j)})}{k_0} \end{aligned} \quad (4.51)$$

De la même façon que précédemment, on peut écrire $\mathbf{H} = \mathbf{DMD}^\dagger$ avec

$$D_{ii} = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_i + \sigma Z_r^{(i)}) \Psi_m(z_s + \sigma Z_s^{(i)}) e^{i\varphi_m}}{\sqrt{k_0}} \quad (4.52)$$

En utilisant l'équation des modes $\frac{\partial}{\partial z^2} \Psi_m(z) + k_{zm}^2 \Psi_m(z) = 0$, le développement limité de \mathbf{D} à l'ordre 2 en σ s'écrit :

$$D_{ii} \simeq \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_i) \Psi_m(z_s) e^{i\varphi_m}}{\sqrt{k_0}} - \frac{1}{\sqrt{k_0}} \frac{\sigma^2 \left[(Z_s^{(i)})^2 + (Z_r^{(i)})^2 \right]}{2} \sum_{m=0}^{M-1} k_{rm}^2 \Psi_m(z_i) \Psi_m(z_s) e^{i\varphi_m} \quad (4.53)$$

soit

⁹ On remarquera que l'expression de σ dépend de la position du diffuseur. Il en résulte que pour un état de surface donné, plus le diffuseur est près de la surface, moins \mathbf{K} est perturbé.

$$D_{ii} \simeq \left[(V_{moy})_i + \frac{\sigma^2 \left[(Z_r^{(i)})^2 - (Z_s^{(i)})^2 \right]}{2} \frac{\partial^2 (V_{moy})_i}{\partial z^2} \right] \quad (4.54)$$

avec

$$\mathbf{V}_{moy} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_1)\Psi_m(z_s)e^{i\varphi_m}}{\sqrt{k_0}} \\ \dots \\ \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_n)\Psi_m(z_s)e^{i\varphi_m}}{\sqrt{k_0}} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{V}_0 = \frac{\mathbf{V}_{moy}}{\|\mathbf{V}_{moy}\|} = \frac{1}{\sqrt{M - f(\frac{\pi z_s}{d})}} \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_1)\Psi_m(z_s)e^{i\varphi_m}}{\sqrt{k_0}} \\ \dots \\ \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_n)\Psi_m(z_s)e^{i\varphi_m}}{\sqrt{k_0}} \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

La suite du calcul est analogue en tout point au calcul des valeurs propres pour une cible en mouvement dans un guide. On peut toujours décomposer \mathbf{H} en 2 matrices d'ordres différents :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2\delta k_0} [\mathbf{A} + \mathbf{B}] \quad (4.56)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}_0 \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right]^2 \mathbf{V}_0^\dagger \quad (4.57)$$

et

$$\begin{aligned} B_{ij} = & \left[-\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 (V_{moy})_i}{\partial z^2} \right] \left[(Z_s^{(i)})^2 + (Z_r^{(i)})^2 \right] \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[(V_{moy})_j^* \right] \\ & + \left[(V_{moy})_i \right] \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[-\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 (V_{moy})_j}{\partial z^2} \right] \left[(Z_s^{(j)})^2 + (Z_r^{(j)})^2 \right] \\ & + \left[(V_{moy})_i \right] \frac{\pi^2 \sigma^2}{2d^2} \left[(Z_s^{(i)} - Z_s^{(j)})^2 \left[-\frac{1}{12}M + \frac{1}{3}M^3 \right] - (Z_s^{(i)} + Z_s^{(j)})^2 g\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[(V_{moy})_j^* \right] \end{aligned} \quad (4.58)$$

Avec la même définition de f et g que dans l'annexe C.

La méthode utilisée précédemment pour calculer la valeur propre est reprise ici en ajoutant la propriété suivante :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N \left[\left(Z_s^{(j)} \right)^2 + \left(Z_r^{(j)} \right)^2 \right] (V_{moy})_j \frac{Z_s^{(j)}}{\sqrt{N}} &= \sum_{j=1}^N \frac{\left[(V_{moy})_j \left(Z_s^{(j)} \right)^3 + (V_{moy})_j \left(Z_r^{(j)} \right)^2 Z_s^{(j)} \right]}{\sqrt{N}} \\
 &= \sqrt{N} \left[\left\langle (V_{moy})_j \left(Z_s^{(j)} \right)^3 \right\rangle + \left\langle (V_{moy})_j \left(Z_r^{(j)} \right)^2 Z_s^{(j)} \right\rangle \right] \\
 &= \sqrt{N} \left[\left\langle (V_{moy})_j \right\rangle \underbrace{\left\langle \left(Z_s^{(j)} \right)^3 \right\rangle}_{=0} + \left\langle (V_{moy})_j \right\rangle \left\langle \left(Z_r^{(j)} \right)^2 \right\rangle \underbrace{\left\langle Z_s^{(j)} \right\rangle}_{=0} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Ce qui nous donne une seconde valeur propre égale à :

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1 &= \frac{N^2 \pi^2 \sigma^2}{d^2} \left[-\frac{1}{12} M + \frac{1}{3} M^3 + g\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \|\mathbf{V}_{moy}\|^2 \\
 &= \frac{N^2 \pi^2 \sigma^2}{d^2} \left[-\frac{1}{12} M + \frac{1}{3} M^3 + g\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

avec comme vecteur propre¹⁰ :

$$\mathbf{V}_1 = \left[(V_0)_j \frac{Z_s^{(j)}}{\sqrt{N}} \right]_{1 \leq j \leq N} \tag{4.61}$$

On retrouve des résultats similaires au cas d'une cible en mouvement dans un guide, l'expression théorique que nous utiliserons dans la suite pour comparer nos données expérimentales à la théorie sera donc l'Eq.(43).

¹⁰ On notera que le vecteur propre \mathbf{V}_1 ne dépend que de l'état de surface au niveau du diffuseur. Si on calcule de la même

manière le vecteur propre \mathbf{U}_1 de la matrice $\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K}$, on peut facilement démontrer que le vecteur propre ne dépendra que de

l'état de surface au niveau du réseau, soit $\mathbf{U}_1 = \left[(V_0)_j \frac{Z_r^{(j)}}{\sqrt{N}} \right]_{1 \leq j \leq N}$

IV.4.2. Expériences en cuve

Nous allons pouvoir maintenant comparer les résultats des expériences en cuve décrites dans la section 1 avec les expressions des valeurs singulières calculées. La Fig.4.23 présente le vecteur singulier temporel reconstruit grâce à la méthode proposée dans le chapitre II. Nous nous sommes servi de cette figure pour avoir une estimation du nombre de réflexions incluses dans le signal traité. Nous pouvons en déduire le nombre de modes maximum qui composent le signal grâce à la formule suivante introduite dans le chapitre précédent :

$$M = \frac{N_{ref} \times d^2}{\lambda L} = \frac{9 \times 38^2}{0.59 \times 400} = 54$$

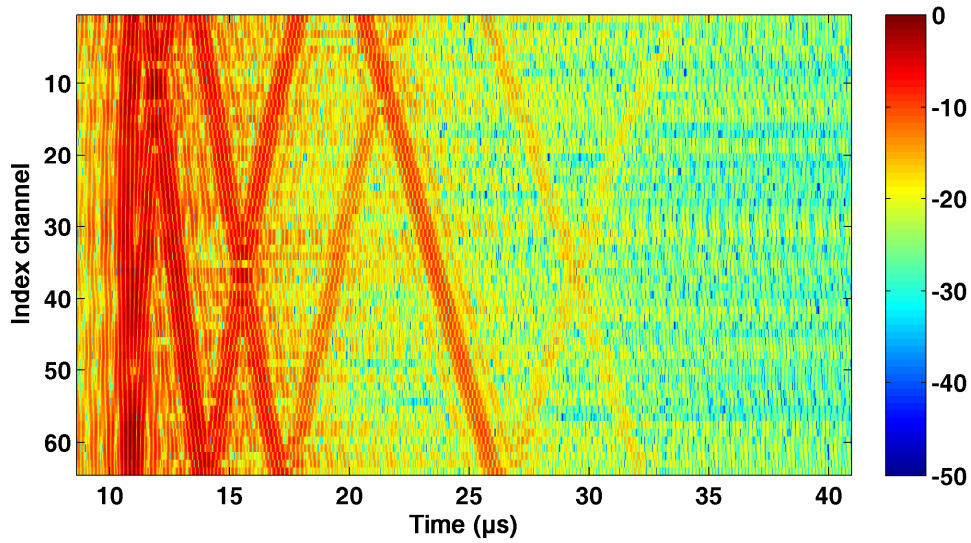


Fig.4.23 Premier vecteur singulier temporel reconstruit pour l'expérience décrite figure 4.1 sans vagues. On voit clairement que le signal est composé de l'écho spéculaire plus 8 réflexions ce qui donne un total de 54 modes dans le guide.

La courbe présentée en début de chapitre sur la figure 4.2 est comparée à la formulation théorique sur la figure 4.24, cette figure montre que la dépendance en σ prédite par l'Eq.(4.60) est en très bonne adéquation avec les données réelles. La deuxième valeur propre croît avec la fréquence à travers le nombre de modes M . La figure 4.26 montre cette dépendance fréquentielle pour un écart-type donné. L'accord entre

expérience et théorie encore une fois est excellent. Cette expression de la seconde valeur propre va nous permettre de connaître avec précision l'écart-type des déformations de la surface alors que le second vecteur propre va nous donner précisément l'état de surface normalisé au niveau de la cible comme le montre la figure 4.24 .

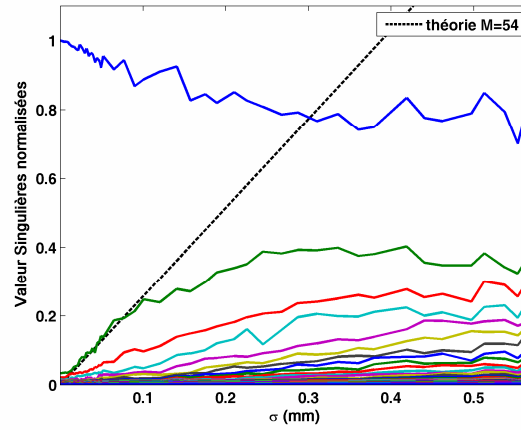


Fig.4.25 Comparaison du comportement des valeurs singulières expérimentales en fonction de l'écart type σ pour $f=2,5$ MHz avec l'Eq.(58) pour un nombre maximum de modes $M=54$.

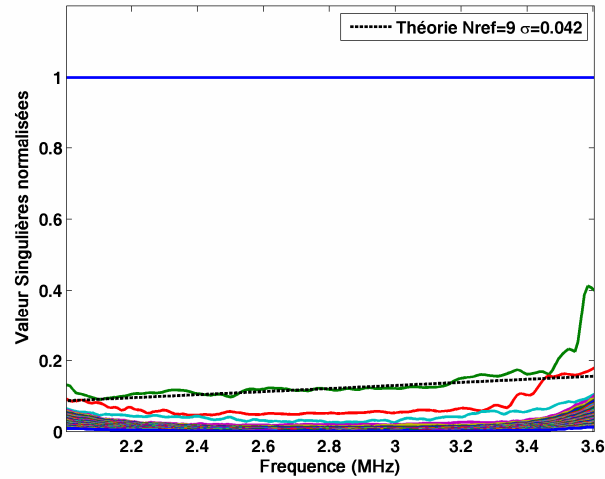


Fig.4.26 Comparaison de l'expérience avec l'expression mathématique de l'Eq.(58) modélisant le comportement des valeurs singulières en fonction de la fréquence pour $\sigma = 0.042$ mm.

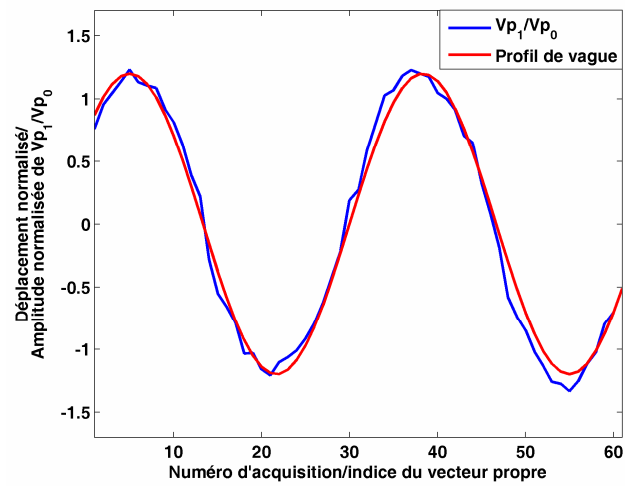


Fig.4.27 Comparaison du profil de vague imposé par le générateur de vague en fonction du numéro d'acquisition et l'amplitude extraite de l'élément correspondant du second vecteur propre à 4,1 MHz.

IV.5. Conclusion

En conclusion, nous avons pu montrer dans les sections précédentes qu'il était possible de calculer l'expression analytique des valeurs propres et des vecteurs propres dans différents cas de figure où l'acquisition de la matrice de transfert \mathbf{K} utilisée dans la méthode DORT se faisait dans un milieu changeant pendant l'acquisition. Nous avons commencé dans le cas expérimental le plus simple d'une cible animée d'un mouvement parallèle au réseau en eau libre et pour finir nous avons donné l'expression de la deuxième valeur propre à l'ordre 2 dans le cas plus complexe d'un guide présentant des ondes de surface gravitationnelles.

Les différents résultats que nous avons présentés sont réunis de façon synthétique dans le tableau suivant :

	Cible en mouvement			Vagues	
	Eau libre		Guide	Guide	
	Point par point	Colonne par Colonne	Colonne par Colonne	Colonne par Colonne	
Λ_0	$N^2 + O(\sigma^2)$	$N^2 + O(\sigma^2)$	$N^2 \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right]^2 + O(\sigma^2)$	$N^2 \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right]^2 + O(\sigma^2)$	
	$\frac{k^2 \sigma^2 N \alpha^2}{16 \pi^2 L^2} \left[1 - \frac{2L}{d} \arctan\left(\frac{d}{2L}\right) \right] + O(\sigma^4)$	$\frac{d^2 N^2 k^2 \sigma^2}{12 L^2} + O(\sigma^4)$	$\frac{N^2 \pi^2 \sigma^2}{d^2} \left[-\frac{1}{12} M + \frac{1}{3} M^3 + g\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] + O(\sigma^4)$	$\frac{N^2 \pi^2 \sigma^2}{d^2} \left[-\frac{1}{12} M + \frac{1}{3} M^3 + g\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] + O(\sigma^4)$	
$(\mathbf{V}_0)_i$...	$\frac{1}{\sqrt{N}} e^{ik[M_t S^{(i)}]}$	$\sum_{m=0}^{M-1} \Psi_m(z_i) \Psi_m(z_s) e^{ik_{rm} L} \sqrt{k_{rm}}$	$\sum_{m=0}^{M-1} \Psi_m(z_i) \Psi_m(z_s) e^{ik_{rm} L} \sqrt{k_{rm}}$	
	...	$Z^{(i)} \frac{e^{ik[M_t S^{(i)}]}}{\sqrt{N}}$	$(V_0)_i \frac{Z_s}{\sqrt{N}}$	$(V_0)_i \frac{Z_s}{\sqrt{N}}$	
	...	$\frac{z_i}{\sqrt{N}} e^{ik[M_t S^{(i)}]}$	$(V_0)_i \frac{z_i}{\sqrt{N}}$	$(V_0)_i \frac{z_i}{\sqrt{N}}$	
Vecteurs Propres					
Valeurs Propres					

Annexe A : Calcul des valeurs propres et vecteurs propres de l'ORT

Les valeurs singulières de \mathbf{K} sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice hermitienne $\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{K}}^\dagger$. On utilise l'expression de $\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{K}}^\dagger$ suivante:

$$(\tilde{K}\tilde{K}^\dagger)_{ij} = \frac{1}{(4\pi L)^4} \frac{N}{d} \int_{-d/2}^{d/2} e^{ik(\sqrt{L^2+(z-\sigma Z^{(i)})^2} - \sqrt{L^2+(z-\sigma Z^{(j)})^2})} dz \quad (\text{A1})$$

On développe à l'ordre 2 en σ :

$$(\tilde{K}\tilde{K}^\dagger)_{ij} = \frac{1}{(4\pi L)^4} N - \frac{1}{(4\pi L)^4} N \sigma^2 \left(c_1 (Z^{(i)} - Z^{(j)})^2 + ic_2 \left[(Z^{(i)})^2 - (Z^{(j)})^2 \right] \right) \quad (\text{A2})$$

Avec

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{k^2}{2d} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{x^2}{x^2 + L^2} dx = \frac{k^2}{2} \left(1 - \frac{2L}{d} \arctan\left(\frac{d}{2L}\right) \right) \\ c_2 &= \frac{k}{2d} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{L}{x^2 + L^2} dx = \frac{k}{d} \arctan\left(\frac{d}{2L}\right) \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

En utilisant encore une fois la correction de phase avec cette fois-ci $\phi_j = \sigma^2 c_2 (Z^{(j)})^2$, on se retrouve à devoir chercher les valeurs propres de

$$H_{ij} = \frac{N}{(4\pi L)^4} - \frac{N \sigma^2}{(4\pi L)^4} c_1 (Z^{(i)} - Z^{(j)})^2 \quad (\text{A4})$$

En omettant le facteur $\frac{N}{(4\pi L)^4}$, on cherche les éléments propres de

$$\tilde{H}_{ij} = 1 - \sigma^2 c_1 (Z^{(i)} - Z^{(j)})^2. \quad (\text{A5})$$

Lorsque $\sigma = 0$, cette matrice a une unique valeur singulière non-nulle qui est N . Lorsque σ est non-nul mais petit, cette valeur singulière est légèrement perturbée mais

reste égale à N à un terme en σ^2 près. D'autres valeurs singulières apparaissent, qui sont petites. On cherche un développement d'une valeur propre Λ et d'un vecteur propre V_2 en σ on reprend donc les notations de l'Eq.(16) :

$$\begin{aligned} V_2 &= \alpha_0^{(2)} + \sigma^2 \alpha_1^{(2)} + \sigma^4 \alpha_2^{(2)} + \dots \\ \Lambda_2 &= \beta_0^{(2)} + \sigma^2 \beta_1^{(2)} + \sigma^4 \beta_2^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (A6)$$

On cherche une valeur propre d'ordre σ^2 et on suppose donc que $\beta_0^{(2)} = 0$ et que $\beta_1^{(2)}$ est non-nul. A partir de maintenant, on omet le terme entre parenthèse dans les notations des α et β .

En collectant les termes d'ordre 0 de l'équation $\tilde{H}V_2 = \Lambda_2 V_2$, on obtient

$$\sum_m \alpha_{0m} = 0 \quad (A7)$$

En collectant les termes d'ordre 2, on trouve pour tout j :

$$\sum_m \alpha_{1m} - c_1 \sum_m (Z^{(j)} - Z^{(l)})^2 \alpha_{0m} = \beta_1 \alpha_{0j} \quad (A8)$$

On développe le carré :

$$\begin{aligned} \sum_m (Z^{(j)} - Z^{(l)})^2 \alpha_{0m} &= (Z^{(j)})^2 \sum_m \alpha_{0m} - 2Z^{(j)} \sum_m Z^{(l)} \alpha_{0m} + \sum_m (Z^{(m)})^2 \alpha_{0m} \\ &= -2Z^{(j)} \sum_m Z^{(l)} \alpha_{0m} + \sum_m (Z^{(m)})^2 \alpha_{0m} \end{aligned} \quad (A9)$$

En réinjectant dans l'Eq.(A8), on trouve que α_0 est nécessairement de la forme

$$\alpha_{0j} = A + BZ^{(j)} \quad (A10)$$

Comme $\sum_m \alpha_{0m} = 0$, on doit en fait avoir

$$\alpha_{0j} = B \left(Z^{(j)} - \frac{1}{n} \sum_m Z^{(m)} \right) \quad (A11)$$

Avec Btel que $\sum_m |\alpha_{0m}|^2 = 1$. On multiplie l'Eq.(A8) par $\bar{\alpha}_{0m}$ et on somme sur j :

$$-c_1 \sum_{jm} (Z^{(j)} - Z^{(l)})^2 \alpha_{0m} \bar{\alpha}_{0j} = \beta_1 \sum_j |\alpha_{0j}|^2 \quad (\text{A12})$$

On développe le carré

$$\begin{aligned} \sum_{jm} (Z^{(j)} - Z^{(l)})^2 \alpha_{0m} \bar{\alpha}_{0j} &= \sum_j (Z^{(j)})^2 \bar{\alpha}_{0j} \sum_m \alpha_{0m} - 2 \sum_j Z^{(j)} \bar{\alpha}_{0j} \sum_m Z^{(m)} \alpha_{0m} + \sum_j \bar{\alpha}_{0j} \sum_m (Z^{(m)})^2 \alpha_{0m} \\ &= -2 \left| \sum_j Z^{(j)} \alpha_{0j} \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

ce qui donne

$$2c_1 \left| \sum_j Z^{(j)} \alpha_{0j} \right|^2 = \beta_1 \sum_j |\alpha_{0j}|^2 \quad (\text{A14})$$

En utilisant l'Eq.(A11):

$$2c_1 \left| \sum_j (Z^{(j)})^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_m Z^{(m)} \right)^2 \right|^2 = \beta_1 \sum_j \left| Z^{(j)} - \frac{1}{n} \sum_m Z^{(m)} \right|^2 \quad (\text{A15})$$

ce qui donne

$$2Nc_1 \left(\frac{1}{N} \sum_j (Z^{(j)})^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_m Z^{(m)} \right)^2 \right) = \beta_1 \quad (\text{A16})$$

Tout ceci est valable quels que soient les $Z^{(j)}$. En utilisant le fait que ce sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées de moyenne 0 et de variance 1, la loi des grands nombres donne

$$\beta_1 = 2Nc_1 \quad (\text{A17})$$

Cela prouve que toute valeur propre d'ordre σ^2 a un développement qui commence par $\beta_1 \sigma^2$.

Pour montrer l'unicité : si on a deux valeurs propres Λ et $\tilde{\Lambda}$ d'ordre σ^2 , alors leurs développements ont le même terme dominant :

$$\Lambda = \sigma^2 \beta_1 + \dots, \tilde{\Lambda} = \sigma^2 \beta_1 + \dots$$

et les vecteurs propres correspondants ont aussi les même terme dominant :

$$V_j = \alpha_{0j} + \sigma^2 \alpha_{1j} + \dots, \tilde{V}_j = \alpha_{0j} + \sigma^2 \alpha_{1j} + \dots$$

Si les deux valeurs propres Λ et $\tilde{\Lambda}$ étaient distinctes, alors les deux vecteurs propres devraient être orthogonaux $\sum_j \bar{V}_j \tilde{V}_j = 0$ ce qui imposerait à l'ordre 0 (en σ) $\sum_j |\alpha_{0j}|^2 = 0$, ce qui est faux. Donc il existe une unique valeur propre d'ordre σ^2 .

Annexe B : Formulation de la base des vecteurs propres

On utilise la méthode d'orthonormalisation de Schmidt sur l'ensemble des vecteurs $\{(Z^{(j)})^n, n=1..N\}$ pour construire la base des V_i . Le produit scalaire étant défini de la manière suivante $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \sum_i U_i V_i^*$, le i ème vecteur s'écrit :

$$(V_i)_j = \frac{(Z^{(j)})^i - \sum_j (Z^{(j)})^i (Z^{(j)})^{i-1} - \sum_j (Z^{(j)})^i (Z^{(j)})^{i-2} - \dots - \sum_j (Z^{(j)})^i (Z^{(j)})^0}{\left\| (Z^{(j)})^i - \sum_j (Z^{(j)})^i (Z^{(j)})^{i-1} - \sum_j (Z^{(j)})^i (Z^{(j)})^{i-2} - \dots - \sum_j (Z^{(j)})^i (Z^{(j)})^0 \right\|} \quad (\text{B1})$$

Si on considère que les $\sigma Z^{(j)}$ sont à moyenne nulle, l'Eq.(B1) devient, en faisant l'hypothèse que la loi de distribution des $Z^{(j)}$ est gaussienne pour simplifier les expressions des V_i :

$$\begin{aligned}
 (V_0)_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \\
 (V_1)_j &= \frac{Z^{(j)}}{\sqrt{N}} \\
 (V_2)_j &= \frac{(Z^{(j)})^2 - 1}{\sqrt{2N}} \\
 (V_3)_j &= \frac{(Z^{(j)})^3 - 3Z^{(j)}}{\sqrt{6N}}
 \end{aligned} \tag{B2}$$

Annexe C : Expression des valeurs propres de l'Opérateur de Retournement Temporel

	Valeurs propres
Λ_0	$n^2 + \sigma^2 \left(-\frac{a^2 n^2 k^2}{12 L^2} \right) + \sigma^4 \left(\frac{a^2 n^2 k^2}{4 L^4} + \frac{7 a^4 n^2 k^4}{720 L^4} \right) + \sigma^6 \left(\frac{11 a^4 n^2 k^4}{120 L^6} - \frac{5 a^2 n^2 k^2}{4 L^6} - \frac{17 a^6 n^2 k^6}{15120 L^6} \right)$
Λ_1	$\sigma^2 \left(\frac{a^2 n^2 k^2}{12 L^2} \right) + \sigma^4 \left(\frac{a^4 n^2 k^4}{80 L^4} - \frac{a^2 n^2 k^2}{4 L^4} \right) + \sigma^6 \left(\frac{5 a^2 n^2 k^2}{4 L^6} + \frac{a^4 n^2 k^4}{8 L^6} + \frac{a^6 n^2 k^6}{700 L^6} \right)$
Λ_2	$\sigma^4 \left(\frac{a^4 n^2 k^4}{360 L^4} \right) + \sigma^6 \left(-\frac{11 a^6 n^2 k^6}{30240 L^6} - \frac{a^4 n^2 k^4}{30 L^6} \right)$
Λ_3	$\sigma^6 \left(\frac{a^6 n^2 k^6}{16800 L^6} \right)$

Tab.C2 Expressions analytique à l'ordre 6 des valeurs propres de $\hat{\mathbf{H}}$.

Annexe D : Développement limité de l'Opérateur de Retournement Temporel en guide d'onde

On va calculer la matrice de l'Opérateur Retournement Temporel $\mathbf{H} = \mathbf{K}\mathbf{K}^\dagger$

$$\mathbf{H}_{ij} = \sum_{l=1}^N \mathbf{K}_{il} \mathbf{K}_{lj}^* = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_i) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(i)}) e^{ik_m L}}{\sqrt{k_m}} \times Q(z_l) \times \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_j) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(j)}) e^{-ik_m L}}{\sqrt{k_m}} \quad (\text{D1})$$

$$\text{où } Q(z_l) = \sum_{l=1}^N \left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_l) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(i)}) e^{ik_m L}}{\sqrt{k_m}} \times \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_l) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(j)}) e^{-ik_m L}}{\sqrt{k_m}} \right]$$

En supposant que la hauteur d'eau du guide est bien échantillonnée, on peut remplacer la somme discrète par une intégrale et utiliser les relations d'orthogonalité et de fermeture des modes :

$$\begin{aligned}
 Q(z_l) &= \frac{1}{\delta} \int_{-d/2}^{d/2} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_l) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(i)}) e^{ik_{rm}L}}{\sqrt{k_{rm}}} \times \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_l) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(j)}) e^{-ik_{rm}L}}{\sqrt{k_{rm}}} dz_l \\
 &= \frac{1}{\delta} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_s + \sigma Z^{(i)}) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(j)})}{k_{rm}}
 \end{aligned} \tag{D2}$$

$$\mathbf{H}_{ij} = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_i) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(i)}) e^{ik_{rm}L}}{\sqrt{k_{rm}}} \times \frac{1}{\delta} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_s + \sigma Z^{(i)}) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(j)})}{k_{rm}} \times \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_j) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(j)}) e^{-ik_{rm}L}}{\sqrt{k_{rm}}} \tag{D3}$$

avec $\delta = \frac{d}{N}$

On peut mettre \mathbf{H}_{ij} sous la forme du produit de matrice suivant :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{D}^\dagger \\
 \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_1) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(1)}) e^{ik_{rm}L}}{\sqrt{k_{rm}}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_n) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(n)}) e^{ik_{rm}L}}{\sqrt{k_{rm}}} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_s + \sigma Z^{(1)}) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(1)})}{k_{rm}} & \dots & \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_s + \sigma Z^{(1)}) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(n)})}{k_{rm}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_s + \sigma Z^{(n)}) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(1)})}{k_{rm}} & \dots & \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_s + \sigma Z^{(n)}) \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(n)})}{k_{rm}} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{D4}$$

Dans le cas d'un guide océanique parfait, une bonne approximation de l'expression des modes sans pertes Ψ_m est :

$$\Psi_m(z) = \sqrt{\frac{2\rho}{d}} \sin(k_{zm}z) \quad \text{et} \quad k_{zm} = \frac{\pi}{2d} + m \frac{\pi}{d}.$$

$$M_{ij} = \frac{1}{\delta} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\sin(k_{zm}(z + \sigma Z^{(i)})) * \sin(k_{zm}(z + \sigma Z^{(j)}))}{k_{zm}}$$

$$M_{ij} = \frac{1}{\delta k_0} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\sin(k_{zm}(z + \sigma Z^{(i)})) * \sin(k_{zm}(z + \sigma Z^{(j)}))}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_m)}} \quad (D5)$$

En faisant l'hypothèse que les angles sont petits on ne garde que l'ordre 0 en θ_m , on a :

$$M_{ij} = \frac{1}{\delta k_0} \sum_{m=0}^{M-1} \sin(k_{zm}(z_s + \sigma Z^{(i)})) \sin(k_{zm}(z_s + \sigma Z^{(j)}))$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2\delta k_0} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \cos(k_{zm}\sigma(Z^{(i)} - Z^{(j)})) - \sum_{m=0}^{M-1} \cos(k_{zm}(2z_s + \sigma(Z^{(i)} + Z^{(j)}))) \right] \quad (D6)$$

En considérant que $\sigma(Z^{(i)} + Z^{(j)})$ est petit par rapport à $2z_s$, on peut faire un développement en série de l'Eq.(D6) à l'ordre 2.

$$\cos(k_{zm}\sigma(Z^{(i)} - Z^{(j)})) = 1 - \frac{k_{zm}^2 (Z^{(i)} - Z^{(j)})^2 \sigma^2}{2} + \frac{k_{zm}^4 (Z^{(i)} - Z^{(j)})^4 \sigma^4}{24} + o(\sigma^6)$$

$$\cos(k_{zm}(2z_s + \sigma(Z^{(i)} + Z^{(j)}))) = \cos(2k_{zm}z_s) - \sin(2k_{zm}z_s)k_{zm}(Z^{(i)} + Z^{(j)})\sigma$$

$$- \frac{\cos(2k_{zm}z_s)k_{xm}^2 (Z^{(i)} + Z^{(j)})^2 \sigma^2}{2} + o(\sigma^3) \quad (D7)$$

La distribution des positions de la cible étant gaussienne, toutes les puissances impaires de σ sont nulles, on a donc :

$$M_{ij} = \frac{1}{2\delta k_0} \left[\begin{array}{c} M - \cos\left(\frac{\pi M z_s}{d}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi M z_s}{d}\right)}{\sin\left(\frac{\pi z_s}{d}\right)} \\ - \frac{\pi^2 \sigma^2}{2d^2} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 (Z^{(i)} - Z^{(j)})^2 - \sum_{m=0}^{M-1} \cos\left(\frac{2(m + \frac{1}{2})\pi z_s}{d}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 (Z^{(i)} + Z^{(j)})^2 \right] \\ + o(\sigma^3) \end{array} \right] \quad (D8)$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2\delta k_0} \left[\begin{array}{c} M - \cos\left(\frac{\pi M z_s}{d}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi M z_s}{d}\right)}{\sin\left(\frac{\pi z_s}{d}\right)} \\ - \frac{\pi^2 \sigma^2}{2d^2} \left[(Z^{(i)} - Z^{(j)})^2 \left[-\frac{1}{12}M + \frac{1}{3}M^3 \right] - (Z^{(i)} + Z^{(j)})^2 \sum_{m=0}^{M-1} \cos\left(\frac{2(m + \frac{1}{2})\pi z_s}{d}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \right] \\ + o(\sigma^3) \end{array} \right] \quad (D9)$$

Soit

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_1) * \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(1)}) * e^{ik_m L}}{\sqrt{k_{rm}}} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_n) * \Psi_m(z_s + \sigma Z^{(n)}) * e^{ik_m L}}{\sqrt{k_{rm}}} \end{pmatrix}, \quad (D10)$$

on peut faire un développement en série de $\Psi_m(z_s + \sigma Z^{(1)})$ en σ ,

$$\Psi_m(z_s + \sigma Z^{(1)}) = \Psi_m(z_s) + \frac{\sigma^2 (Z^{(1)})^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi_m(z_s)}{\partial z^2} + o(\sigma^3) \quad (D11)$$

On a donc:

$$D_{ii} \simeq \left[(V_{moy})_i + \frac{\sigma^2 \left[(Z_r^{(i)})^2 - (Z_s^{(i)})^2 \right]}{2} \frac{\partial^2 (V_{moy})_i}{\partial z^2} \right] \quad (D12)$$

avec

$$\mathbf{V}_{moy} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_1) \Psi_m(z_s) e^{ik_{rm}L}}{\sqrt{k_{rm}}} \\ \dots \\ \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_n) \Psi_m(z_s) e^{ik_{rm}L}}{\sqrt{k_{rm}}} \end{pmatrix} \quad (D13)$$

V_{moy} est la fonction de Green de la barrette à la position moyenne de la cible.

On a donc en remplaçant \mathbf{D} et \mathbf{M} par leur développement limité dans l'Eq.(D4) et en regroupant les termes de même ordre:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2\delta k_0} [\mathbf{A} + \mathbf{B}] \quad (D14)$$

avec

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}_0 \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right]^2 \mathbf{V}_0^\dagger \quad (D15)$$

où

$$\mathbf{V}_0 = \frac{\mathbf{V}_{moy}}{\|\mathbf{V}_{moy}\|} = \frac{1}{\sqrt{M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right)}} \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_1)\Psi_m(z_s)e^{ik_{rm}L}}{\sqrt{k_{rm}}} \\ \dots \\ \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Psi_m(z_n)\Psi_m(z_s)e^{ik_{rm}L}}{\sqrt{k_{rm}}} \end{pmatrix} \quad (\text{D16})$$

(\mathbf{V}_0 est la fonction de Green normalisée de la barrette à la position moyenne de la cible)

et

$$\begin{aligned} B_{ij} = & \left[-\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 (V_{moy})_i}{\partial z^2} \right] Z^{(i)2} \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[(V_{moy})_j^* \right] \\ & + \left[(V_{moy})_i \right] \left[M - f\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[-\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 (V_0)_j^*}{\partial z^2} \right] Z^{(j)2} \\ & + \left[(V_{moy})_i \right] \frac{\pi^2 \sigma^2}{2d^2} \left[(Z^{(i)} - Z^{(j)})^2 \left[-\frac{1}{12}M + \frac{1}{3}M^3 \right] - (Z^{(i)} + Z^{(j)})^2 g\left(\frac{\pi z_s}{d}\right) \right] \left[(V_{moy})_j^* \right] \end{aligned} \quad (\text{D17})$$

avec

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{m=0}^{M-1} \cos\left(2\left(m + \frac{1}{2}\right)z\right) = \cos(Mz) \frac{\sin(Mz)}{\sin(z)} \\ g(z) &= \sum_{m=0}^{M-1} \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \cos\left(2\left(m + \frac{1}{2}\right)z\right) = \frac{M^2 \sin(2Mz)}{2 \sin(z)} - \frac{M \cos(z) \cos(2Mz)}{2 \sin(z)^2} - \frac{(1 + \cos(z)^2) \sin(2Mz)}{8 \sin(z)^3} \end{aligned} \quad (\text{D18})$$

Bibliographie

- ¹ D.R. Dowling, "Phase conjugate array focusing in a moving medium", J. Acoust. Soc. Am., **94**(3), 1716-1718 (1993)
- ² P. Roux, M. Fink, "Time reversal in a waveguide : Study of the temporal and spatial focusing", J. Acoust. Soc. Am., **107**(5), 2418-2429 (2000)
- ³ K.G. Sabra, D.R. Dowling, "Effects of time-reversing array deformation in an ocean wave guide", J. Acoust. Soc. Am., **115**, 2844 – 2847 (2004)
- ⁴ N. Mordant, C. Prada, and M. Fink, "Highly resolved detection and selective focusing in a waveguide using the D.O.R.T. method," J. Acoust. Soc. Am. **105**, 2634–2642 (1999).
- ⁵ C. Prada, J. De Rosny, D. Clorennec, J. G. Minonzio, A. Aubry, M. Fink, L. Bernière, S. Hibral, P. Billand, and T. Folégot, "Experimental detection and focusing in shallow water by Decomposition of the Time Reversal Operator," J. Acoust. Soc. Am. **122**, 768–761 (2007).
- ⁶ Lord Rayleigh: "The Theory of Sound", vol. II, 2nd ed., 1896. Reprinted by Dover Publications, Inc, New York, 1945, p.89
- ⁷ C. Eckart, "The scattering of sound from sea surface", J. Acoust. Soc. Am., **25**, 566 – 570 (1953)
- ⁸ C.T. Tindle, G.B. Deane, "Shallow water sound propagation with surface waves", J. Acoust. Soc. Am., **117**, 2783-2794, (2005)
- ⁹ I. Tolstoy, C.S. Clay, "Ocean acoustics : Theory and experiment in underwater sound", édité par The American Institute of Physics, Inc, 199-237, 1987
- ¹⁰ J. Zhou, X. Zhang, Z. Peng, J.S. Martin, "Sea surface effect on shallow-water reverberation", J. Acoust. Soc. Am., **121**, 98-1007, (2007)
- ¹¹ D.H. Cato, "Theoretical and measured underwater noise from surface wave orbital motion", J. Acoust. Soc. Am., **89**, 1096-1112, (1991)
- ¹² L. Landau et E. Lifchitz, "Physique Théorique, tome 6, Mécanique des Fluides", édité par MIR
- ¹³ C.F. Gaumond, D.M. Fromm, J.F. Lingeitch, R. Menis, G.F. Edelmann, D.C. Calvo, and E. Kim, "Demonstration at sea of the decomposition-of-the-time-reversal-operator technique", J. Acoust. Soc. Am., **119**(2), 976-990,(2005)
- ¹⁴ A. Boutet de Monvel, A. Khorunzhy et V. Vasilchuk, "Limiting eigenvalue distribution of random matrices with correlated entries", Markov Process. Related Fields **2**, 607-636 (1996).
- ¹⁵ W. Hachem, P. Loubaton et J. Najim, "The empirical distribution of the eigenvalues of a Gram matrix with a given variance profile", Ann. I. H. Poincaré - PR **42**, 649-670 (2006).
- ¹⁶ A. Messiah, « Mécanique Quantique », volume 2. Dunod, Paris, 2^{ème} édition, 1969.
- ¹⁷ A. Aubry, J. de Rosny, J. Minonzio, C. Prada, and M. Fink, "Gaussian beams and Legendre polynomials as invariants of the time reversal operator for a large rigid cylinder", J. Acoust. Soc. Am. **120**, 2746 (2006)
- ¹⁸ H. Bucker, "Matched-field tracking in shallow water," J. Acoust. Soc. Am. **96**, 3809–3811 (1994).

- ¹⁹ M. J. Wilmut and J. M. Ozard, "Detection performance of two efficient source tracking algorithms for matched-field processing," J. Acoust. Soc. Am. **104**, 3351–3355 (1998).
- ²⁰ S. L. Tatum and L. W. Nolte, "Tracking and localizing a moving source in an uncertain shallow water environment," J. Acoust. Soc. Am. **103**, 362–373 (1998).
- ²¹ Dosso, S. E., and Wilmut, M. J. "Uncertainty estimation in simultaneous Bayesian tracking and environmental inversion," J. Acoust. Soc. Am. **124**, 82-97. (2008).
- ²² J.C. Slater, "Microwave Transmission", McGraw-Hill Book Compagny, New York, 1948.
- ²³ C.G. Montgomery, R.H. Dicke, E.M. Purcell (eds.), "Principles of Microwave Circuits", p. 191, McGraw-Hill Book Compagny, New York, 1948.
- ²⁴ A.O. Williams, M.N. Lewis, "Approximate Normal Modes Methods of Calculation for Sound Propagation in Shallow Water", Tech. Rept. 56-1, Brown University, Providence R.I., 1956.
- ²⁵ T. Folégot, "Détection par Décomposition de l'Opérateur Retournement Temporel en Acoustique Sous-Marine par Petits Fonds", Thèse de l'Université Denis Diderot, Mars 2003.

Conclusion et perspectives

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit permet de comprendre le comportement des invariants de l'Opérateur de Retournement Temporel dans différentes configurations complexes en acoustique sous-marine.

Tout d'abord, le premier chapitre situe ce travail par rapport aux travaux qui ont déjà été réalisés sur le retournement temporel en acoustique et plus récemment sur la méthode DORT. Nous avons vu qu'en acoustique sous-marine, de nombreuses études ont été menées sur la caractérisation de cibles ou le retournement temporel en milieu non stationnaire. Néanmoins, ce travail est le premier à étudier la caractérisation d'une cible en guide d'onde grâce à la méthode DORT et à considérer de manière théorique l'influence d'un milieu non stationnaire sur les invariants de l'ORT.

Dans le second chapitre, nous donnons au lecteur les outils nécessaires pour développer les aspects théoriques décrits par la suite. La méthode des images indispensable à la compréhension du phénomène de super résolution rencontré lors des expériences de RT en guide est exposée ainsi que la méthode de décomposition en modes normaux. Cette dernière nous permet de simplifier énormément les calculs présentés dans les chapitres suivants. Ce chapitre présente aussi diverses méthodes de simulation. Notamment, nous présentons une simulation en espace libre qui nous sert à développer une méthode simple et astucieuse pour reconstruire les « vecteurs propres temporels ». Cette méthode, baptisée SVP pour Synchronisation des Vecteurs Propres, ouvre la voie à l'utilisation de la méthode DORT en télécommunication dans les milieux marins petits fonds et nous prouvons sa robustesse dans différentes configurations de guide d'onde. La dernière partie de ce chapitre présente des exemples de l'utilisation de codes orthogonaux pour l'acquisition instantanée de la matrice DORT. Nous montrons que ces codes permettent de retrouver une distribution de

valeurs singulières permettant la détection de cibles en présence de vagues mais que la localisation de ces cibles nécessite une moyenne sur plusieurs acquisitions. Les atouts et désavantages inhérents aux différents codes sont aussi décrits en détails.

Le troisième chapitre s'attelle à la caractérisation d'une cible en guide d'onde. Dans un guide d'onde, la présence de chemins multiples brouille la signature fréquentielle rétrodiffusée de l'objet à identifier. Nous utilisons la décomposition modale dans le cas d'une cible isotrope puis de deux cibles isotropes et enfin dans le cas d'une cible anisotrope. Ce chapitre démontre ainsi que DORT permet de séparer le phénomène de chemins multiples du phénomène de diffusion de la cible. Ainsi la signature fréquentielle peut être retrouvée sans connaissance a priori du milieu. En effet, la première valeur singulière est proportionnelle à la signature de la cible. Nous montrons même que les autres valeurs singulières donnent accès à des informations supplémentaires sur le diagramme de rayonnement de la cible. Le calcul nous permet aussi d'extraire le paramètre limitant cette caractérisation. Ces résultats sont validés par une série d'expériences ultrasonore en cuve et par la repropagation numérique des vecteurs propres dans le modèle numérique R.A.M.

Dans le quatrième chapitre, la question du comportement des invariants de l'ORT lorsque le milieu change pendant l'acquisition est traitée. Afin d'expliquer la remontée des valeurs propres secondaires lorsque le milieu petits fonds présente des fluctuations de sa surface, nous considérons tout d'abord le cas d'une cible en mouvement en eau libre et nous déduisons de la formulation analytique des valeurs propres et des vecteurs propres une nouvelle méthode de suivi de cible. Encore une fois, la décomposition en modes normaux nous permet d'étendre le résultat précédent au cas d'une cible en mouvement dans un guide d'onde. Ces résultats sont corroborés à chaque fois par des simulations numériques ainsi que des expériences petite échelle. Enfin, grâce à l'ensemble de ces résultats, nous pouvons donner une formulation analytique des deux premières valeurs propres de l'ORT dans un guide présentant des ondes de surfaces gravitationnelles à sa surface et nous relierons les vecteurs propres à l'état de surface au niveau de la cible mais aussi des récepteurs.

Ce présent manuscrit s'inscrit dans la continuité du travail de Thomas Folégot et de Jean-Gabriel Minonzio, ainsi les perspectives naturelles des résultats présentés seront de se confronter aux réalités du terrain lors d'un REI commençant en Décembre 2008.

La méthode SVP, quant à elle, a un spectre d'utilisation qui dépasse l'acoustique sous-marine. Notamment, celle-ci pourra être utilisée en électromagnétisme en télécommunication ou pour des applications dans le domaine médical comme la lithotripsie.

Les résultats présentés dans le dernier chapitre méritent eux aussi une étude plus approfondie, en particulier l'utilisation des vecteurs propres pour effectuer le suivi d'une cible ou l'état de surface d'un guide non stationnaire.

Caractérisation et détection de cibles en guide d'onde non stationnaire par Décomposition de l'Opérateur Retournement Temporel

Résumé : Le Retournement Temporel est une technique multi-éléments permettant de focaliser une onde dans un milieu inconnu hétérogène en utilisant la propriété d'invariance par retournement temporel de l'équation des ondes. La formulation matricielle du Retournement Temporel a donné lieu à une technique de détection multi-cibles, la méthode DORT (pour Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel). Cette thèse traite de l'application de la méthode DORT en acoustique sous-marine. Afin d'émettre les vecteurs propres issus de la méthode DORT, nous proposons une nouvelle méthode de reconstruction des vecteurs propres temporels baptisée SVP pour Synchronisation des Vecteurs Propres. Cette méthode est basée sur une repropagation numérique en espace libre des vecteurs propres monochromatiques nécessitant peu d'information sur le milieu. L'acquisition instantanée de la matrice de transfert K à l'aide de codes orthogonaux est aussi étudiée. Nous montrons que la méthode DORT permet d'extraire sans aucune connaissance préalable la signature fréquentielle d'une cible placée dans un guide d'onde et ce malgré les chemins multiples brouillant celle-ci. En effet, la première valeur singulière de la matrice K est proportionnelle à la réponse fréquentielle monostatique de la cible. De plus, nous montrons que les autres valeurs singulières donnent accès à des informations supplémentaires sur le diagramme de rayonnement. Par la suite, nous considérons un problème spécifique aux acquisitions DORT en mer. En effet, le milieu marin étant en constante fluctuation, le principe fondateur des méthodes de Retournement Temporel qui est la stationnarité est souvent mis en défaut. Nous montrons ainsi que la méthode DORT est utilisable en milieu non stationnaire, dans le cas où la cible est animée d'un mouvement vertical parallèle au réseau ou d'un guide d'onde présentant des vagues à sa surface. L'étude des vecteurs propres permet alors de remonter au déplacement de cette cible ou à l'état de surface au niveau de la cible et du réseau.

Mots-clés : Acoustique physique, détection ultra-sonore, retournement temporel, méthode DORT, caractérisation, acoustique sous-marine, milieu non stationnaire, codes orthogonaux.

Characterization and detection of targets in a non stationary waveguide by Decomposition of the Time-Reversal Operator

Abstract : Time Reversal is an multi-element technique allowing for focalisation in an unknown heterogeneous medium by using the time-reversal invariance of the wave equation. The matrix formulation of Time reversal gave birth to a multi-target technique, the DORT method (French acronym for Decomposition of the Time-Reversal Operator). This thesis investigates into the application of the DORT method for underwater acoustics. In order to emit the eigenvectors given by the DORT method, we propose a new method to reconstruct the temporal eigenvectors called SVP for EigenVectors Synchronisation. This method is based on a numerical backpropagation in free space of the monochromatic eigenvectors needing little information on the medium. Instantaneous acquisitions of the multistatic data matrix K with orthogonal codes are also investigated. We show that the DORT method provides a mean to extract without any a priori knowledge the frequency signature of a target in a waveguide despite the blurring caused by multipath. Indeed, the first eigenvalue is proportional to the monostatic frequency response of the target. Moreover, we show that the other eigenvalues contain additional information on the radiation pattern. Then we look into a problem specific to the application of the DORT method at sea. Due to constant fluctuation, the first principle of Time Reversal based techniques, which is a stationary medium, is often faulty. We show here that the DORT method can be used in a non stationary medium, in the case of a target moving vertically or a waveguide having sea surface wave. The study of the eigenvectors allows then to retrieve the positions of the target during the acquisition or the surface state over the target and the array.

Key-words: Physical acoustics, ultrasound detection, time-reversal, DORT method, characterization, underwater acoustics, non stationary medium, orthogonal codes.